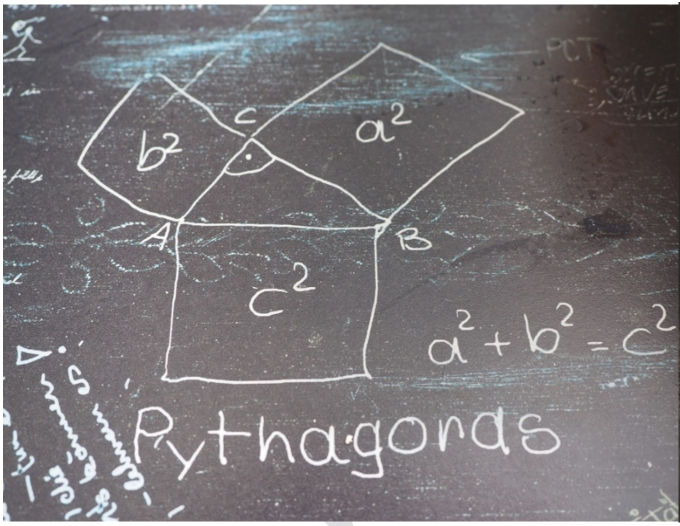
Enseigner les nombres

LALINA COULANGE
&
GRÉGORY TRAIN

espe
université de BORDEAUX



Des ressources pour le cycle 1

Remarques préliminaires :

Les premières ressources présentées ci-dessous ont pour objectif de travailler le nombre comme mémoire d'une quantité et comme moyen de comparer des quantités. La mise en œuvre en classe de celles-ci nécessitent en amont un travail sur autant que / plus que… travail qui prend appui sur la mise en relation de quantités.

Ressource n°1 : le nombre comme mémoire d'une quantité (PS)

Margolinas 2012

Matériel :

- des boîtes à œufs découpées (avec 1,2 ou 3 alvéoles)
- des barquettes
- des objets (marrons, jetons...)

Déroulement :

1ère phase : appropriation

Chaque enfant dispose d'une boîte à œufs (avec des alvéoles) et d'un stock d'objets. Il doit remplir la boîte en ne mettant qu'un seul objet dans chaque alvéole. Cette phase peut d'abord se dérouler en autonomie puis en présence du maître

2ème phase : situation-problème

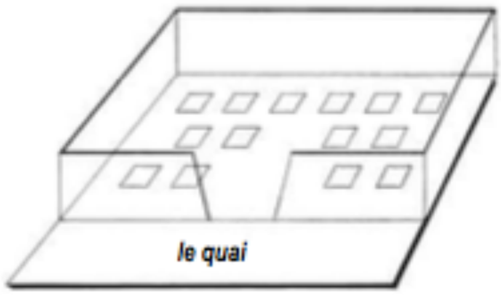
Maintenant, le stock d'objets est éloigné de la table sur laquelle travaillent les enfants. Le maître donne à chaque enfant une boîte à alvéoles (qui doit rester sur la table) et une barquette. Chaque enfant doit aller cherche juste ce qu'il faut d'objets, pas plus, pas moins, pour remplir la boîte avec les alvéoles. Il ne doit pas rester d'alvéoles vides. Il ne doit pas rester d'objets dans la barquette.

Ressource n°2 : le nombre comme mémoire d'une quantité (PS-MS-GS)

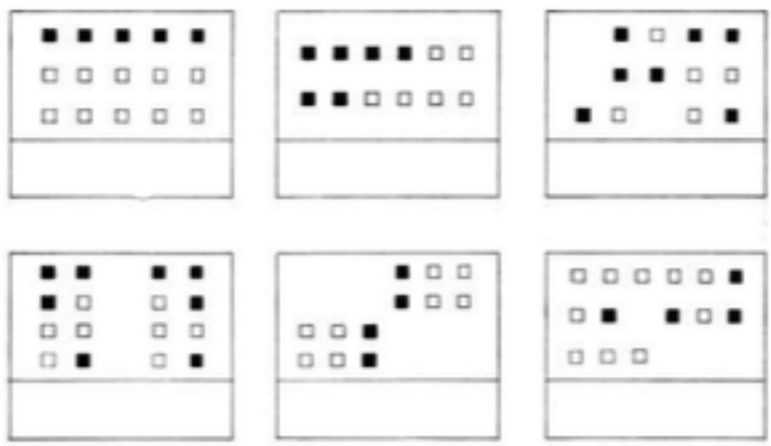
Ermel

Matériel :

- un support
- des fiches « autobus »
- un stock d'objets identiques (jetons par exemple)
- l'autobus (sur lequel est placée une fiche « autobus »)



Exemples de fiches « autobus »



Déroulement :
Une fiche « autobus est glissée dans le support. Cette fiche comprend des carrés noirs (les places déjà occupées) et des carrés blancs (les places libres). L'enfant doit prendre juste ce qu'il faut de passagers (les jetons) pour terminer de remplir tout le bus, « pas plus, pas moins, juste ce qu'il faut. » Pour cela, l'enfant prend des jetons puis les pose sur le quai (« les passagers attendent sur le quai »). Ensuite, il doit dire s'il pense qu'il a réussi à en prendre juste ce qu'il faut pour terminer de remplir le bus. Cette étape est essentielle car elle permet à l'enfant d'expliciter la stratégie qu'il a utilisée. Enfin, il peut vérifier en posant les jetons sur les cases blanches. S'il reste des jetons sur le quai ou si toutes les cases blanches ne sont pas recouvertes, il n'a pas pris juste ce qu'il faut de passagers.

1ère phase : appropriation de la situation
Le stock de jetons est placé à proximité du support et l'enfant peut prendre plusieurs fois des jetons. Dans cette phase, l'objectif est que l'enfant se familiarise avec la situation.

2ème phase : avec une contrainte, « prendre en une seule fois les jetons »
Le stock de jetons est toujours placé à proximité du support mais cette fois-ci, l'enfant doit prendre les jetons nécessaires en une seule fois.

3ème phase : situation-problème
Maintenant, le stock de jetons n'est plus placé à proximité du support : lorsque l'enfant va prendre des jetons, il ne peut plus voir celui-ci. Aussi, doit-il garder en mémoire la quantité de jeton nécessaire pour terminer de remplir le bus.

4ème phase : situation de communication « écrite »

Le dispositif est similaire à celui de la 3ème phase. Cependant, pour obtenir des jetons, l'enfant ne peut plus les prendre lui-même. Il doit les demander à un marchand (rôle joué par un autre enfant ou par le maître) par l'intermédiaire d'un bon de commande (support écrit

5ème phase : situation de communication orale

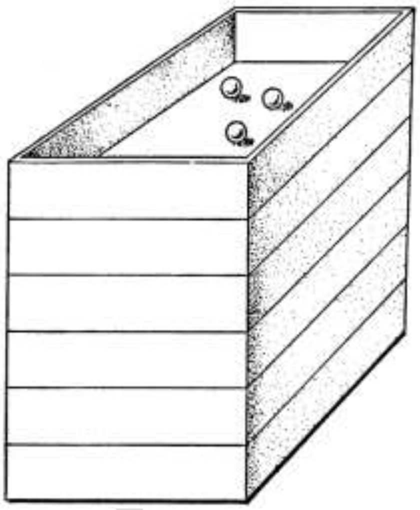
Comme pour la 4ème phase, l'enfant doit s'adresser au marchand mais cette fois-ci oralement.

Ressource n°3 : le nombre pour comparer des quantités (MS-GS)

Ermel

Matériel :

- 6 boîtes empilables contenant chacune des objets identiques (de 1 à 5) : ces boîtes sont disposées de telle sorte que seul le contenu de celle du dessus soit visible.
- 1 gros dé
- 1 dé de taille classique (avec constellation / avec nombre en écriture chiffrée)



Déroulement :

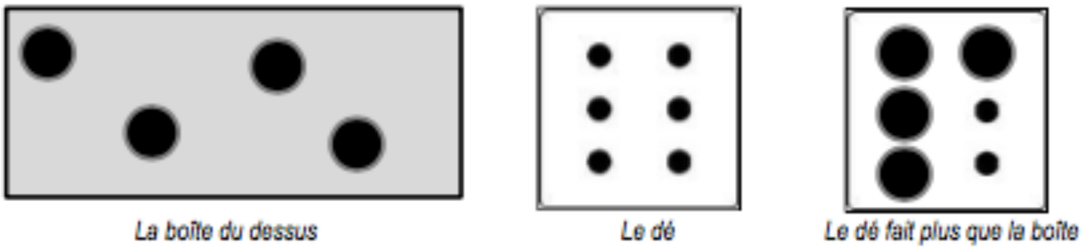
De 2 à 6 joueurs.

Le premier joueur lance le dé. Il prend la boîte du dessus de la pile si le nombre d'objets dans la boîte est plus petit que le nombre représenté sur le dé. La règle peut être formulée de la façon suivante : « Tu peux prendre la boîte si tu fais plus avec le dé que ce qu'il y a dans la boîte ». S'il ne peut pas prendre la boîte, c'est au joueur suivant de jouer. Lorsque toutes les boîtes ont été distribuées ainsi, on détermine le gagnant : c'est celui qui a le plus d'objets.

Dans une deuxième phase, le gros dé pourra être remplacé par un dé classique, les enfants pouvant toujours organiser une correspondance terme à terme en pointant les éléments de la constellation du dé. Il pourra être intéressant ensuite de proposer ce même jeu avec un dé comportant les écritures chiffrées des nombres de 1 à 6. Dans ce cas, le recours au nombre (sous sa représentation écrite en chiffres) est clairement induit par le choix de ce type de dé.

Remarque : Les enfants ont souvent des difficultés à maîtriser le vocabulaire « plus que », « moins que », « autant que ». Il semble donc important de clarifier la définition que l'on donne à ce vocabulaire : dans la collection A, il y a « plus » d'éléments « que » dans la collection B ; cela signifie que si l'on fait une correspondance terme à terme entre la collection A et la collection B, il restera des éléments seuls dans la collection A. Dans cette définition, c'est la correspondance terme à terme qui donne du sens au vocabulaire « plus que ». Le recours au nombre n'est donc pas impératif.

L'utilisation d'un gros dé et de jetons permet de construire la définition suivante du «plus que»: pour gagner la boîte du dessus, il faut faire «plus» avec le dé «que» ce qu'il y a dans la boîte ; cela signifie que si je mets un jeton sur un point de la constellation du dé, à la fin, il reste au moins un point non recouvert par un jeton.



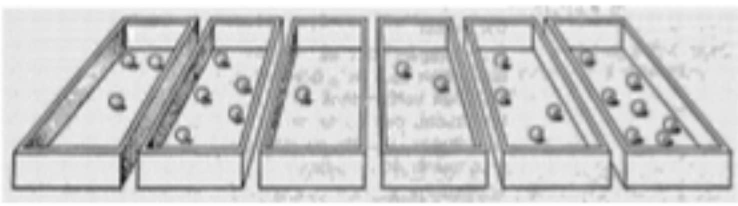
De même, lorsqu'à la fin d'un jeu, il s'agit de savoir qui a gagné en déterminant qui a le plus de jetons, une comparaison « physique » des collections de jetons semble pertinente pour donner du sens à ce « plus de jetons » : les enfants alignent (en les faisant se toucher) les jetons gagnés. La comparaison « visuelle » des « longueurs » des collections permet de savoir qui en a le plus.
Variante : cette situation peut être proposée en augmentant le nombre de boîtes et d'objets dans les boîtes. Pour cela, on peut utiliser un jeu de cartes à la place du dé (cartes « cœur » de 1 à 10), puis deux dés à constellations.

Ressource n°4 : le nombre pour comparer (GS)

Ermel

Matériel :

- 6 boîtes identiques contenant chacune des objets identiques (de 1 à 5) : ces boîtes sont disposées côte à côte sur la table (de façon aléatoire)
- 1 dé



Déroulement :
La règle est similaire à celle de la situation « Les boîtes empilées ». Cependant, ici, le joueur peut choisir la boîte qu'il souhaite.

Remarque : cette situation est plus difficile que la précédente. En effet, l'enjeu est ici double : il s'agit également d'en prendre le plus possible.

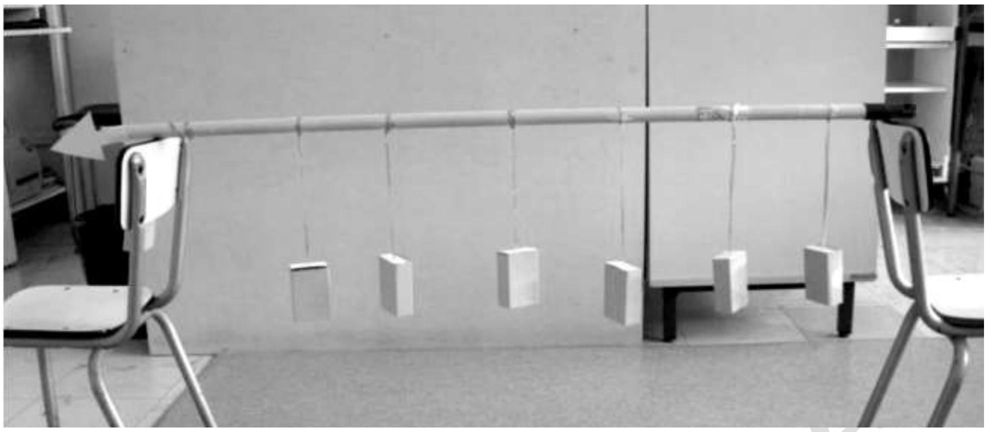
Ressource n°5 : le nombre comme mémoire d'un rang (MS-GS)

Briand, Loubet, Salin

Matériel :

- un bâton
- des boites d'allumettes toutes identiques

- des objets différents



Déroulement :
Cette situation s'appuie sur e dispositif suivant :
- un bâton auquel sont accrochées, au bout d'un fil, 7 à 10 boîtes d'allumettes;
- dans chacune, un objet
- une des extrémités du bâton est repérable (triangle).

Le bâton est d'abord posé sur une table pour que les élèves fassent une liste, ensuite, le lendemain, le bâton est suspendu entre deux chaises. Le maître montre une boîte et l'élève doit dire l'objet qui y est caché, à l'aide de sa liste.

1ère phase : présentation de la situation et premiers essais
Le maître réunit les enfants. Il pose, devant eux, entre 2 chaises, le bâton orienté où sont suspendues les boîtes et place, dans chacune des boîtes, un objet. «J'ai mis un objet dans chaque boîte. Pour l'instant, les boîtes sont ouvertes mais, demain, elles seront fermées quand je vous appellerai pour jouer. Je vous montrerai une boîte avec cette pastille et il faudra me dire quel est l'objet qui est caché dedans. » Le dispositif est ensuite posé sur une table en plaçant les boîtes ouvertes [on peut faire le choix de mettre toutes les boîtes ouvertes du même côté ou bien de les disposer de façon aléatoire, d'un côté ou de l'autre du bâton]. Les enfants viennent alors librement, pendant qu'ils sont au travail dans les différents ateliers, « faire leur liste». Le soir, le maître ferme les boîtes.
Le lendemain, il soulève le bâton et le repose entre 2 chaises : les boîtes se retrouvent alors toutes suspendues à leur fil et alignées côte à côte. Le maître interroge les enfants un par un. Ils doivent pour réussir, nommer l'objet qui se trouve dans la boîte qu'il désigne au moyen d'une pastille. L'ouverture de la boîte atteste de la réussite ou de l'échec. Si l'élève échoue, le professeur lui montre la boîte dans laquelle se trouve l'objet qu'il a nommé.

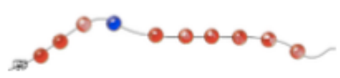
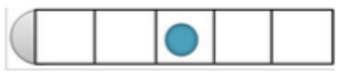
Phases suivantes
La situation se déroule ainsi pendant plusieurs séances. Pour chaque nouvelle phase, les objets sont changés de place lors d'une séance collective avec le bâton posé entre les deux chaises.
Pour réussir, l'enfant devra non seulement perfectionner sa liste (représentation correcte et ordonnée et identification du point de repère pour orienter le bâton) mais aussi adopter une stratégie de lecture idoine (prise en compte du repère et de l'orientation du bâton).
Peuvent être mis à disposition des enfants des photographies des objets.
Une situation de communication peut être construite : celui qui ira avec le maître n'est pas le même que celui qui a la liste. Ainsi, le recours au nombre dans son aspect ordinal sera induit : « pour montrer au maître où se trouve la boîte du bonhomme, tu dois partir du repère et compter jusqu'à 3 » ou bien « le bonhomme se trouve dans la troisième boîte à partir du repère ». Dans cette situation, l'utilisation du vocabulaire « troisième » n'est pas l'objectif principal. Il s'agit par contre de faire

mettre en œuvre par les enfants une procédure utilisant le nombre dans son aspect ordinal (avec ou sans vocabulaire canonique).

Ressource n°6

Margolinas & Wozniak 2015

Enseigner le nombre comme mémoire de la position demande de s'appuyer sur un milieu matériel qui comporte des files ayant une origine, une orientation et un rang, comme c'est par exemple le cas des objets ci-dessous :


Toutes ces files comportent une origine possible, qui induit un sens et un rang pour un objet distingué parmi les autres. Dans tous les cas, pour comparer des files, il est possible de faire une comparaison terme à terme : aligner le nœud avec le nœud puis chacune des perles jusqu'à la perle distinguée, par exemple

Déroulement :

Première phase : phase d'éloignement dans le temps

Dans les premiers écrits, de nombreux élèves produisent d'abord un dessin non orienté (pas de trace d'une origine ou d'une orientation) dont une position au moins correspond au collier modèle. C'est le cas par exemple du dessin ci-dessous, au moment où l'élève doit reconstruire le collier (éloignement dans le temps), il ne peut pas savoir s'il faut tenir le dessin dans un sens ou dans l'autre. Il peut donc faire une reproduction du modèle correcte ou incorrecte.



Seconde phase de communication à autrui

Dans la phase suivante (communication à autrui), de nombreux élèves produisent un schéma qui comporte une origine et un sens.


Stratégies :
Quand les élèves ont produit des écritures chiffrées (nouvelle phase d'éloignement dans le temps : interdiction des dessins), ils ont inventé une façon d'utiliser les quantités et l'écriture pour décrire les colliers : 5 1 4 pour décrire un collier dans lequel la perle bleue est en sixième position à partir du nœud. Cette façon de décrire le collier a été majoritaire dans cette expérimentation pour la recherche.

Quelques élèves ont utilisé des nombres ordinaux, par exemple en trouvant un moyen de désigner la position de la perle bleue dans la suite des nombres, ce qui veut dire que chaque nombre représente bien une position : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 pour un collier dans lequel la perle bleue est en sixième position à partir du nœud. Une minorité des élèves est capable de distinguer clairement le sens ordinal et le sens cardinal des nombres. C'est par exemple le cas de Manon, qui écrit 4 5 5 pour désigner un collier dans lequel la perle bleue est en cinquième position à partir du nœud et qui dit : « d'abord il y a quatre blanches, elle est en cinquième, et après il y a cinq perles blanches ».

Ressource n°7 : les nombres pour anticiper (MS-GS)

Matériel :

- des cubes (les caisses)
- des camions (jouets ou dessins)

Déroulement :
Il s'agit de répartir les caisses dans les camions. Dans chaque camion, il peut y avoir 3, 4 ou 5 caisses (au-delà, le camion est trop chargé ; en deçà, le contrôleur refuse). Plusieurs procédures peuvent être mise en œuvre par les enfants :

- distribuer les caisses unes à unes
- les distribuer par deux ou par trois
- placer le maximum de caisses dans les premiers camions puis réajuster ensuite si nécessaire
- placer le minimum de caisses dans chacun des camions et gérer ensuite ce qui reste
- dénombrer souvent les caisses mises dans les camions pour vérifier le respect des contraintes (pas moins de 3 et pas plus de 5)

1ère phase : appropriation de la situation
La consigne suivante est donnée : « Il faut mettre toutes les caisses dans les camions. Mais, dans chaque camion, on peut mettre 3, 4 ou 5 caisses. » En fin d'activité, le maître fait valider à chaque groupe la partition effectuée (après rappel des contraintes).
2ème phase : situation-problème
Chaque groupe dispose des caisses mais pas des camions. C'est le maître qui les a. Sur chaque camion, un nombre (ou sa représentation sous forme de constellation) est écrit :

Chaque groupe devra donc prévoir la partition à faire puis demander au maître les camions nécessaires.
3ème phase : contrainte supplémentaire
Une nouvelle activité peut être proposée : lorsque les enfants demandent au maître les camions nécessaires, après avoir vérifié que la partition prévue était conforme aux contraintes imposées, le maître peut annoncer qu'il n'y a pas assez de camion de 5 par exemple, ce qui oblige les enfants à modifier la partition (en mettant en œuvre une procédure de réajustement).

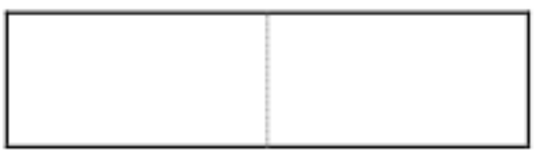
Ressource n°8 : les nombres pour anticiper (MS-GS)

Ermel

Matériel :

- bandes de papier :
  - certaines avec des traits de partage
  - certaines avec des gommettes collées
- gommettes
- bouts de ficelle
- crayon et ciseaux

Déroulement :
1ère phase : appropriation de la situation
Dans chaque groupe, trois équipes sont constituées : A, B et C. L'équipe A reçoit une bande avec un trait de partage et des gommettes (en nombre pair choisi en fonction des compétences des enfants, de 6 à 20) à coller sur cette bande.



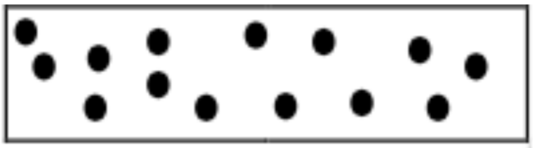
L'équipe A doit placer toutes les gommettes sur la bande. Il faut qu'il y en ait autant (pareil) de chaque côté du trait. [Le maître régule discrètement si nécessaire] Ensuite, l'équipe A découpe selon les pointillés et donne une moitié de bande à chaque équipe (B et C).

Les équipes B et C disposent chacune d'une bande vierge. Elles doivent coller le morceau reçu sur cette bande vierge puis compléter la bande avec des gommettes pour avoir autant de gommettes qu'avant le découpage.

Les trois équipes sont regroupées et le maître conduit les échanges pour savoir si la tâche est réussie et surtout, comment il faut faire pour réussir.

2ème phase :

L'équipe A reçoit deux bandes identiques avec des gommettes déjà collées : l'équipe travaille sur l'une des bandes, l'autre jouant le rôle de bande témoin.



La consigne est la suivante : « vous devez trouver la ligne de partage pour qu'il y ait autant de gommettes de chaque côté. ». Les enfants ont à leur disposition un morceau de ficelle (pour essayer) puis tracent la ligne de partage lorsqu'ils sont sûrs.

Comme lors de la 1ère phase, la bande ainsi construite est ensuite coupée en deux et chaque morceau est confié à une autre équipe (B et C). Celle-ci doit alors compléter la bande avec des gommettes.

Les bandes sont ensuite comparées avec la bande témoin.

3ème phase : situation-problème

L'équipe A « rejoue » la 2ème phase avec une grosse bande (visible par toute la classe). Elle cherche la ligne de partage puis découpe la bande. L'une des deux parties de la bande est affichée. La consigne suivante est donnée aux autres équipes : « vous devez fabriquer une bande qui a autant de gommettes que leur bande complète ».

Après une phase de recherche, les enfants sont regroupés. Les bandes produites par les équipes sont comparées par dénombrement.

Cette situation est reprise en agissant sur le temps d'affichage de la moitié produite par l'équipe A. Ainsi, la procédure de correspondance terme à terme ne permet plus d'être efficace.

4ème phase : institutionnalisation

Le maître fait verbaliser par les enfants

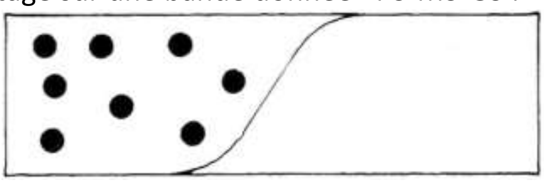
les procédures de recherche de la moitié : « pour chercher la moitié, lorsqu'il faut faire le trait de partage, on fait un essai, on compte et on ajuste »

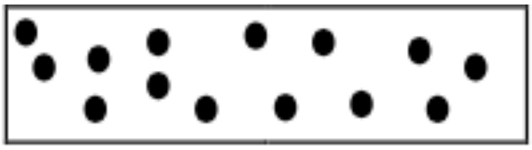
les procédures de recherche du double : « pour chercher la bande entière, on compte le nombre de gommettes de la moitié et on le répète deux fois »

5ème phase : évaluation

On peut demander aux enfants de

- compléter une bande dont on connaît une moitié
- trouver la ligne de partage sur une bande donnée PS-MS-GS :





Ressource n°9 : comptage (PS-MS-GS)

Briand, Loubet, Salin

Matériel :

- des boîtes d'allumettes dans lesquelles un trou a été percé de chaque coté
- un tas d'allumettes

Déroulement :
En collectif, le maître présente le jeu : "Voici un jeu pour lequel vous devrez trouver une méthode pour gagner. Il y a sur la table des boîtes et un tas d'allumettes. Vous devez mettre, dans chaque boîte, une allumette et une seule, en la passant par le petit trou. Vous n'avez pas le droit d'ouvrir la boîte. Quand vous pensez avoir fini, nous regarderons ensemble si vous avez gagné ou perdu. Pour gagner, il faut une seule allumette dans chaque boîte et aucune boîte vide."
Au moment des ateliers, une table est réservée à cette situation et un enfant la fait en autonomie (ou sous le regard du maître qui observe la stratégie utilisée). Dès que l'enfant estime avoir terminé, le maître engage la validation : chaque boîte est ouverte. La réussite est effective si une allumette et une seule se trouve bien dans chaque boîte. Cette situation est proposée d'abord avec un petit nombre de boîtes d'allumettes déplaçables, puis en augmentant le nombre de boîtes et enfin en fixant les boîtes d'allumettes (elles ne sont plus déplaçables).

Des ressources pour le cycle 2

Ressource n°1

La bande numérique verticale (suggestion Ermel, reprise sur TFM : **http://tfl.roll-descartes.fr/**)

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

Etc.

Cette bande (faite avec un rouleau de papier type « caissier ») est accrochée dans la classe et proposée à l'observation des élèves. On attend leurs remarques et constatations. On souhaite qu'ils constatent :
- la répétition régulière du chiffre de droite
- la persistance du chiffre de gauche jusqu'à l'apparition d'un 9 pour le chiffre de droite,
- enfin la modification de ce chiffre de gauche au passage du chiffre de droite de 9 à 0.

A partir de ces observations on peut proposer l'activité suivante :

Le professeur va rouler la bande numérique de chaque côté d'un nombre qui sera montré aux élèves. Ils devront trouver le nombre qui vient juste avant et/ou juste après, un nombre montré. Ces deux nombres sont cachés dans le rouleau que tient le professeur. Il suffit ensuite de dérouler la bande numérique pour vérifier le dire des élèves. Il faudra se placer dans des situations simples au début puis dans des situations plus complexes dans lesquelles les deux chiffres du prédécesseur ou du successeur sont modifiés. Il est nécessaire de ne pas accepter seulement la réponse des élèves mais de leur demander d'expliquer comment ils ont fait pour trouver la solution. Cela permet à ceux qui n'ont pas encore compris comment trouver le nombre caché de s'imprégner d'une méthode qu'ils ne maîtrisent pas encore.

Ressource n°2

La situation des bûchettes (inspirée de la situation des fourmilions) DVD « Enseigner les mathématiques au cycle 2 » de Fénichel et Taveau – reprise sur TFM **http://tfl.roll-descartes.fr/** par Sophie Mazzolier)

L'objectif est de faire découvrir l'intérêt des groupements par dix dans une situation de dénombrement d'une collection constituée d'un grand nombre d'objets. Les élèves vont être amenés à organiser une collection en utilisant les groupements par dix afin d'obtenir un dénombrement plus fiable que le dénombrement de un en un.

Cette situation permet de commencer à donner du sens à chacun des chiffres de la désignation écrite des nombres.

Matériel : Une collection de plusieurs centaines de bûchettes (un nombre non entier de centaines, par exemple 637 bûchettes). Des élastiques, des sachets.

Phase 1 : La collection de bûchettes est étalée sur une table devant les élèves. L'enseignant demande aux élèves combien il y en a. Devant la disparité des réponses, il demande aux élèves de trouver un moyen pour se mettre d'accord sur le nombre exact.

Le dénombrement deun en un est bien sûr vite écarté au profit d'une procédure utilisant des groupements. Les élèves ne proposent pas nécessairement des groupements par 10, il est important de les laisser entamer leur procédure afin qu'ils en voient les limites. Le choix des groupements par dix, éventuellement suggéré par l'enseignant, est conventionnel et se justifiera, plus tard, par le lien avec le comptage de dix en dix (voir les activités : Carrelages, Grand ziglotron, Cartes).

Les élèves font des paquets de dix bûchettes qu'ils attachent avec des élastiques. Il est bien précisé que l'on ne met pas d'élastique s'il y a moins de dix bûchettes. On peut introduire alors le mot dizaine : un paquet de dix bûchettes représente une dizaine de bûchettes.

Quand tous les paquets de dix bûchettes sont prêts, on réitère les groupements au niveau supérieur en mettant en sachet dix paquets de dix bûchettes.

Le nombre de bûchettes de la collection est formulé à l'aide du nombre de sachets, de paquets et d'unités restantes.

Phase 2 : Il s'agit de trouver un moyen pour traduire le contenu d'un sachet.

La plupart des élèves ont recours au comptage par dix. Des confusions sont fréquentes entre les bûchettes et les paquets de bûchettes. Par exemple, certains élèves commencent à dénombrer de dix en dix puis continuent de un en un (10 - 20 - 30 - 40 - 41 - 42 …). Ces erreurs sont reprises lors de la mise en commun des procédures. Le tableau des nombres est utilisé pour la validation.

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
DEPART									

On peut introduire à cette occasion un nouvel outil : la bande numérique des dizaines jusqu'à 90.

Phase 3 : découverte de l'écriture chiffrée du nombre de bûchettes.

On ne vise pas, à ce moment-là, la maîtrise de cette écriture mais bien plutôt la découverte de son existence.

L'enseignant acceptera les écritures suivantes :

- 6 sachets de cent, 3 paquets de dix et 7 bûchettes ;

- 100 + 100 + 100+ 100+ 100+ 100 + 10 + 10 + 10 + 7

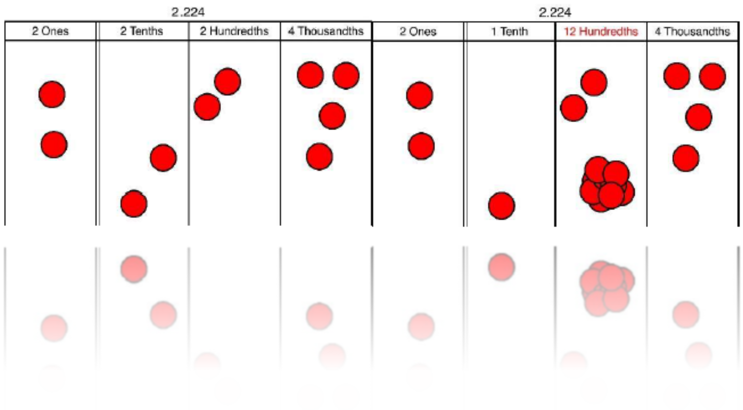
- 600 + 300 + 7

Si l'écriture canonique 637 n'est pas proposée, elle l'est par l'enseignant qui la présente comme la plus courte ou l'usuelle. Elle peut être découverte grâce à une calculatrice.

On n'attend pas que les élèves la retiennent et puissent l'écrire seuls le lendemain !

En conclusion, l'enseignant revient sur les propositions initiales des élèves, toutes différentes, et le fait que le choix d'organiser la collection de bûchettes en utilisant le groupement par dix a permis à tous de se mettre d'accord sur le nombre de bûchettes.

Ressource n°3



https://itunes.apple.com/us/app/place-value-chart/id568750442?mt=8

Ressource n°4

Cette activité vise à reconnaître un nombre entier sous différentes écritures. Le but est de poursuivre et de consolider les acquis de l'école sur les nombres entiers et leurs différentes désignations possibles. Il s'agit à partir d'écritures de nombres à associer de formuler ce qu'une écriture nous « dit » sur le nombre. Dès le CP, savoir que 3 + 2 est une écriture de 5 tout comme 3 + 1 + 1 peut l'être est un enjeu d'apprentissage. Cette activité est adaptée à un travail de groupe, la consigne relativement ouverte encourage les échanges entre élèves. Les séries de carte sont distribuées aux élèves par ordre croissant de difficulté.

Déroulement : les trois séries de cartes sont différenciées. Prévoir pour chaque groupe une série de cartes, trois feuilles réponse numérotées et une enveloppe pour ranger les cartes à la fin de chaque séance. Chaque groupe travaille sur la table. Au départ, les élèves préparent des ciseaux et un stylo.

Première phase : Chaque groupe reçoit la première série de carte avec la première consigne : *« Découpez les cartes puis classez-les dans des paquets différents. Il faudra donner la raison du classement. »* Le rôle de l'enseignant se limite à réguler la dynamique de classe. Il n'intervient pas sur les savoirs en jeu : il n'explique rien, ne se prononce pas sur la validité de la réponse (à cette étape, plusieurs classements sont possibles, tous valables même si certains seront remis en cause par la suite)

Seconde phase : Dès qu'un groupe a fini son classement et écrit la raison de son classement, il reçoit la deuxième série de cartes avec la deuxième consigne. De nombreux groupes constatent alors qu'ils doivent remettre leur classement en cause (cartes inclassables). Le changement de point de vue est difficile. Le professeur doit inciter à relire et reformuler la consigne puis à se lancer dans la recherche d'un nouveau critère de classement : il ramasse la feuille numéro 1 et donne la feuille numéro 2.

Troisième phase : Chaque groupe continue à son rythme. Dès que les paquets sont clairement identifiés, il reçoit la troisième série de cartes. Cette série permet de confirmer ou d'infirmer le classement. L'observation des productions de chaque groupe permet à l'enseignant de préparer le travail d'exploitation de l'activité en classe entière : débat, validation et synthèse.

Quatrième phase : Pour chaque groupe, ou seulement quelques-uns bien choisis, un rapporteur indique le nombre de paquets obtenus et la raison du classement ». Le professeur exploite les différences annoncées et conduit le débat pour faire énoncer le bon critère : regroupement des différentes écritures d'un même nombre

Cinquième phase : Il s'agit d'un moment de synthèse : Tout nombre a plusieurs écritures et lectures

Exemples de séries à proposer (à modifier selon les différentes écritures d'un même nombre rencontré dans la classe.

Exemple de série n°1

8	10 + 9	32	40 + 6	1	100
9 unités	Deux dizaines	14 - 4	25	10 + 5	Une dizaine et 7 unités

Exemple de série n°2

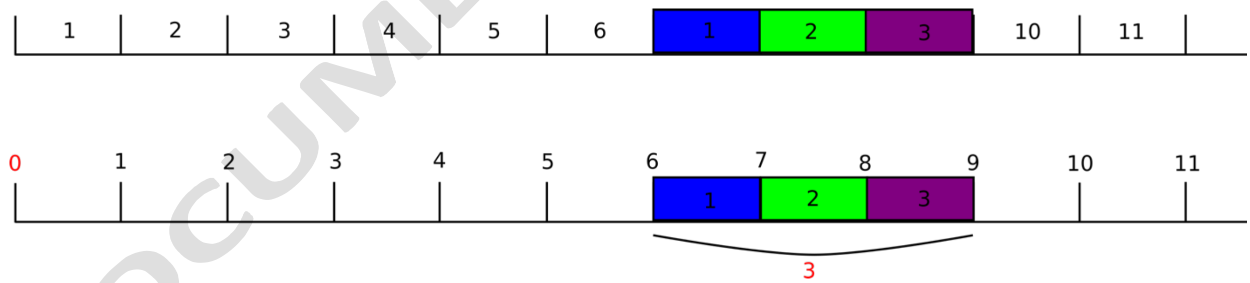
14	Le double de 7	La moitié de 18 unités	5 x 5	46	10 - 1
(10 x 2) + 5	Le double de deux dizaines	19	2 x 16	15	La moitié de 16

Exemple de série n°3

17	Le quart d'une centaine	9	10 – 5 - 5	Vingt unités moins 3 unités	50 – 2 – 2
Dix dizaines	2 + 2 + 2 +2	20	Deux dizaines et la moitié d'une dizaine	(3 x 10) +2	Le quart de 32

Sur la droite graduée : exemples de ressources

La droite graduée est un outil d'importance dès lors qu'il s'agit de représenter les nombres – la représentation des nombres par les abscisses des points d'une droite étant fondamentale pour le repérage des nombres décimaux (au cycle 3, et même relatifs au cycle 4) sur cette droite par la suite, et en continuité de l'idée de rang (caractère ordinal du nombre au cycle 1).
Cet outil pose différentes questions relatives à son usage et donc à son appropriation par les élèves. Déjà dans le cas des entiers, la question d'appréhender la différence et le lien entre repères et intervalles se pose : par report d'une unité, on peut numéroter et compter les intervalles ; le nombre s'écrit alors « au long » du segment, entre ses deux extrémités. Le report réitéré d'une même longueur « étalon » sur une demi-droite permet la construction d'une graduation. Et si l'on appose des nombres sur cette graduation pour en faire une demi-droite graduée, ces nombres ne sont plus écrits sur les intervalles mais sous les points qui servent de repères, à l'extrémité de chacun d'eux.



Notons que c'est bien le positionnement des nombres non plus sous les intervalles mais sous les points qui servent de repères qui justifie la nécessité du zéro placé en début de graduation.

Le passage du report de l'unité à la graduation par des nombres suppose donc d'avoir compris le rôle du zéro pour marquer l'origine et le fait que le nombre qui est marqué à côté du point indique la mesure de la longueur du segment dont les extrémités sont l'origine du repère et le point repéré (avec pour unité la longueur du segment qui a pour extrémités les points marqués 0 et 1), c'est-à-dire la distance du point repéré à l'origine.

Remarque du cycle 2 au cycle 3 – ou de l'intérêt de conserver « un double regard » du type de ci-dessus sur la droite graduée

Si l'on s'intéresse à la tâche suivante : placer 2,4 sur une demi-droite graduée. La technique associée à cette tâche est alors suivante :

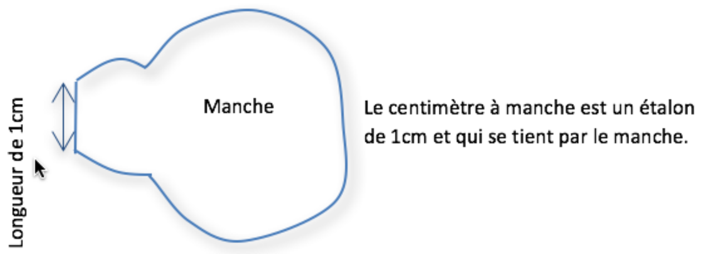
- Considérons une telle demi-droite sur laquelle on choisit une unité de longueur u, matérialisée par le segment $[OI]$, I désignant le point unité.
- La longueur de ce segment est l'unité de longueur u, ou encore 1u.
- Placer le nombre décimal 2,4 sur cette demi-droite consiste à y produire le point A tel que le segment $[OA]$ ait pour longueur 2,4 u.
- Ce que l'on fait en plaçant bout à bout le segment $[OA]$ de longueur 2u et le segment $[AA']$ de longueur 4/10 u.
- Ensuite, on écrit sous l'extrémité A du segment ainsi obtenu le nombre décimal 2,4

De ce point de vue, la règle graduée introduite en CE1 est un instrument qui cache une activité fondamentale : celle du report des longueurs. Mesurer c'est dénombrer. Utiliser la règle graduée, c'est être conscient du lien qui existe entre la mesure des longueurs comme mise bout à bout d'unités que l'on peut dénombrer et la lecture sur une graduation comme repérage d'une position : la différence entre deux graduations correspond au nombre d'intervalles qui les séparent…

Ressource n°5

Matériel

- 1 centimètre à manche par élève
- Un rectangle bristol (environ 23 cm sur 5 cm)



Phase n°1 : Rendre pertinent l'utilisation d'une règle graduée (se ré-entrainer sur le report)

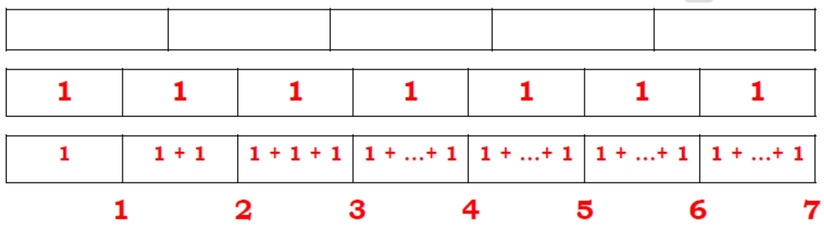
Chaque élève se voit remettre un centimètre à manche. Cet outil est présenté. En particulier, l'enseignant veillera à expliciter la longueur de 1cm. Les élèves mesurent un segment (identique ou non pour tous) en reportant autant de fois que nécessaire l'étalon. Ce nombre de fois doit être assez grand pour rendre le travail fastidieux. L'enseignant annonce alors que l'on va construire un instrument qui permettra de mesurer plus vite et plus efficacement, en particulier en évitant les problèmes d'imprécision de report de l'étalon. Les élèves le connaissent sûrement…

Phase n°2 : Construction d'une règle graduée non numérotée

L'enseignant fait alors placer l'étalon au bord de la bande (ou non) et fait marquer un trait au bout de cet étalon. Il fait ensuite placer l'étalon au niveau de cette marque et fait marquer un trait à l'autre extrémité. Et ainsi de suite autant de fois que le permet la bande de papier cartonné. Les repères ne sont pas encore numérotés à cette étape. Les élèves devront alors utiliser cet instrument pour mesurer des segments (dont la longueur correspond à un nombre entier d'étalons) en plaçant le bord de la bande au « début » du segment et en faisant compter les intervalles (toujours faire compter dans le sens de lecture). On peut faire remarquer que placer une extrémité du segment en face du bord de la bande n'est pas indispensable, on peut la placer en face de n'importe quel repère : il faut alors compter les intervalles entre les deux repères qui correspondant aux extrémités du segment.

Phase n°3 : Construction de la graduation numérotée

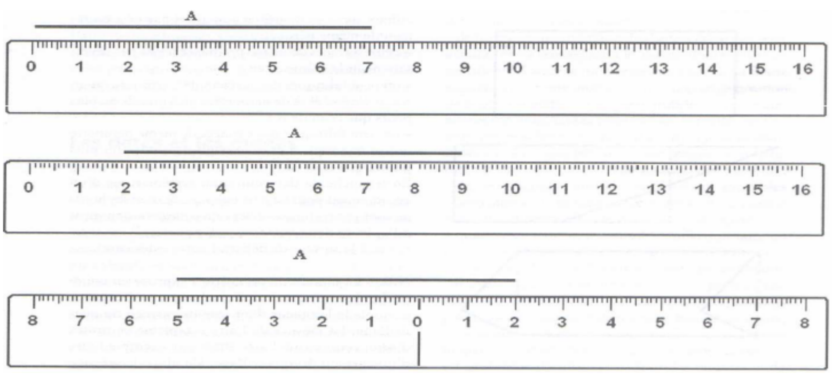
L'enseignant ayant fait mesurer plusieurs segments, il questionne ses élèves sur le moyen d'éviter de compter à chaque fois les intervalles dans l'objectif de leur faire dire qu'on pourrait numéroter. Il est possible que des élèves proposent alors de numéroter les intervalles (ce qui revient à les compter) comme sur le 1 er schéma ci-dessus. La comparaison avec un double-décimètre peut alors conduire à placer les nombres en face des repères. Le repère 1 indique qu'on a compté un intervalle, le repère 2 qu'on en a compté deux, et ainsi de suite. Cette place est ainsi justifiée par le fait qu'on met le 1 « au bout » de l'étalon, avant cela ne fait pas encore « 1 ».



Ressource n°6

Ermel

Utilisation de règles bizarres : effacée partiellement, cassée aux extrémités, trop petites par rapport au segment à mesurer ou dont le 0 est positionné de manière centrale (cf. dessin ci-dessous)



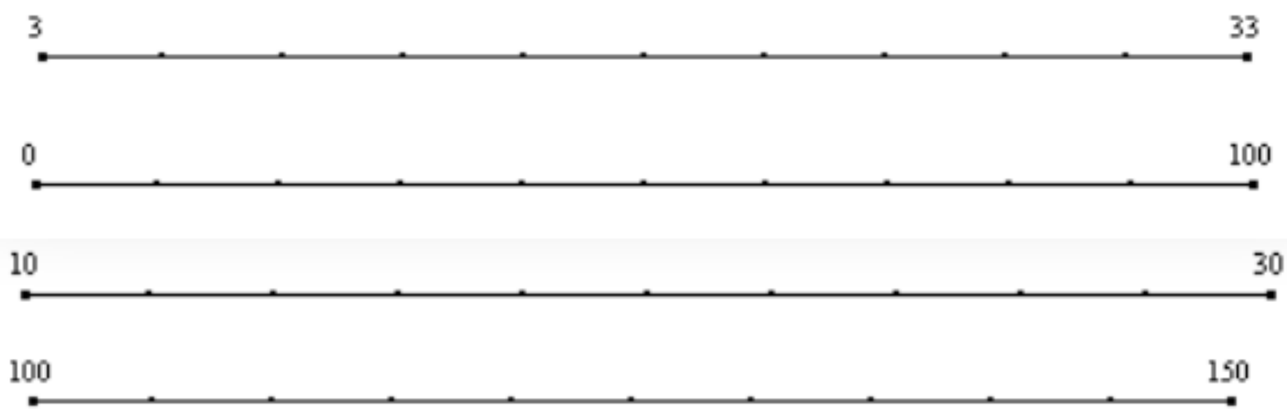
Ressource n°7

Ermel

Des élèves ont à mesurer plusieurs longueurs avec une graduation comme celle-ci (les élèves disposent d'une règle graduée sans indication de nombres). Que conseilleriez-vous à ces élèves de faire sur cette graduation pour se faciliter la tâche ? Faites-le aussi.

Ressource n°8

Demander aux élèves de graduer/placer des points sur ces différentes droites graduées

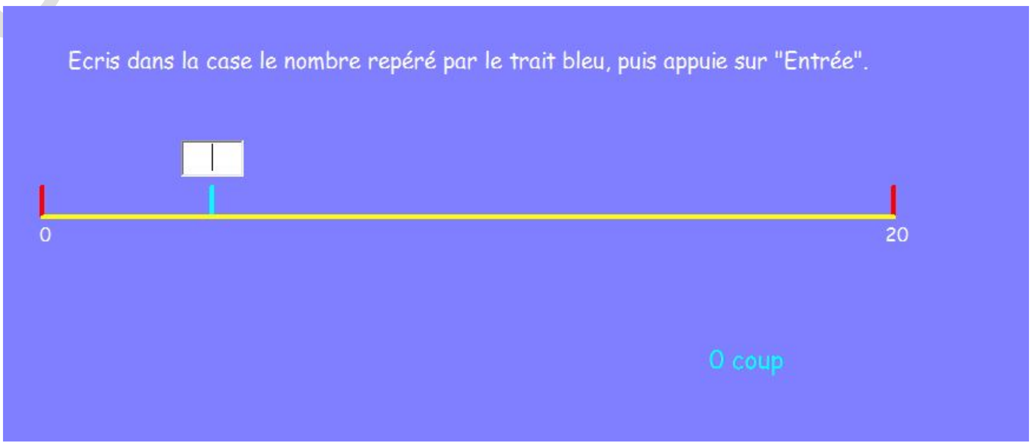


Prolongement : on pourra donner des repères autres que les extrémités, ou encore donner au cycle 3 des tâches du même type avec des nombres décimaux.

Ressource n°9

Abacalc est un petit logiciel gratuit permet de travailler toutes les notions de calcul et de numération du Cp au Cm2.Il permet à chaque élève de créer facilement son espace personnel, et donc de travailler les notions de manière progressive, le logiciel se chargeant de sauvegarder les résultats. L'élève peut donc reprendre son travail là où il l'a laissé. Il est téléchargeable à l'adresse suivante
http://ticealecole.over-blog.fr/article-abacalc-logiciel-gratuit-pour-les-mathematiques-du-cp-au-cm2-92986110.html

Concernant les possibilités offertes par ce logiciel, existent en particulier des tâches liées à la droite graduée qui prolongent le travail engagé dans les ressources présentées précédemment.



Des ressources pour le cycle 3

Ressource n°1 : (re)construire le principe de groupement pour les décimaux (CM1, CM2 ou en tout début de sixième) – L'enveloppe des nombres

Le sens des unités de numération (dixièmes, centièmes, millièmes) et/ou des fractions décimales (1/10 ; 1/100 ; 1/1000) a souvent été construit dans le sens « partage » : un dixième correspond à une unité partagée en 10 ; un centième correspond soit à une unité partagée en 100 (dont on constate éventuellement qu'il y en a 10 dans un dixième), soit à un dixième partagé en 10 (dont on constate qu'il y en a éventuellement 100 dans une unité). Le sens « groupement » utilisé pour des conversions entre unités de numérations nous semble plus rarement considéré, alors que de fait souvent relativement absent dans cette première construction des unités de numération et/ou des fractions. Nous avons donc expérimenté et repris une situation de Fénichel et Taveau (2008), citée par Chambris (2015), en la modifiant quelque peu.

La tâche donnée au cœur de cette situation aux élèves (en petits groupes de 4 ou 5 élèves) est la suivante : déterminer mentalement la valeur d'une quantité représentée par un grand nombre d'étiquettes sur chacune desquelles est écrite une unité de numération (une unité, un dixième, un centième…).

- 14 étiquettes « un millième » et 8 étiquettes marquées « 1/1000 »
- 16 étiquettes « un centième » et 19 étiquettes marquées « 1/100 »
- 15 étiquettes « un dixième » et 9 étiquettes marquées « 1/10 »
- 7 étiquettes marquées « une unité » et 6 étiquettes marquées « 1 »
- 2 étiquettes de « une dizaine » et 2 étiquettes marquées « 10 »

Le scénario détaillé décrit pour cette activité est cité en annexe.

Les nombres d'étiquettes retenus forcent les groupements et les conversions (d'une unité de numération d'un rang donné à l'unité de numération de rang directement supérieur) :

10 dixièmes = 1 unité 10 centièmes = 1 dixième 10 millième = 1 centième

Ces conversions sont parfois directement formulées de la manière suivante par les élèves

« 22 millièmes = 2 centièmes et 2 millièmes » ou « 20 millièmes = 2 centièmes »

Il faut parfois faire reformuler le groupement correspondant pour faire comprendre à tous sur quoi repose ce type de propositions. Nous avons d'ailleurs remarqué chez les élèves les plus grands (de sixième) qu'il n'était pas toujours aisé de faire formuler ces relations entre unités de numération qui sont souvent encapsulées dans d'autres tâches pour eux, et devenues transparentes (ils parlent de « faire des calculs » sans préciser de quoi il en retourne du point de vue des groupements - conversions).

Cette activité peut donner lieu à une institutionnalisation collective permettant de faire apparaître une organisation systématique de groupement (du plus petit au plus grand) dans le tableau de numération. Des élèves de CM2 ont parfois tenté d'organiser les groupements selon des colonnes correspondant aux positions de l'écriture chiffrée du nombre sur leur table (ajoutant pour certains un stylo ou un crayon pour « marquer » la virgule. Ceci nous a conduits à penser une nouvelle modification du scénario (par rapport à l'annexe) : « faire apparaître le nombre sur la table de manière à ce que l'enseignant puisse le lire directement, avant que d'en produire une écriture chiffrée ».

Cette activité est une situation de manipulation assez délicate à mettre en œuvre (au regard du matériel à préparer en amont) et nécessite une voire deux séances consécutives (d'environ 1 h). La deuxième séance correspond à une reprise après une première mise en commun à l'issue de la première séance, permettant de rappeler des éléments liés à la construction des unités de numération (le dixième comme un partage de l'unité en 10), à même de faire émerger le principe de groupement (il y a donc 10 dixièmes dans une unité). Elle peut servir de « situation de référence » par la suite : « rappelez-vous, quand nous avions des étiquettes, par exemple 15 étiquettes correspondant à des dixièmes… ».

A la suite de cette situation, on peut proposer des exercices de réinvestissement individuel direct, tels que : Ecrire l'écriture chiffrée du nombre correspondant à « 12 centièmes, 5 dixièmes et 3 unités », puis à « 52 dixièmes, 12 centièmes et 13 millièmes »…

Ressource n°2 : (ré-)introduction de l'écriture décimale et des usages du tableau de numération

L'énoncé de l'activité est le suivant :

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités

1. Placer à l'intérieur de ce tableau[1], les nombres 2560 • 108 • 324.
2. Comment peut-on placer le nombre 10345 ? Expliquer.
3. Comment peut-on placer les nombres $\frac{37}{10}$ et $\frac{23}{100}$? Expliquer.
4. Placer les nombres • $\frac{24}{10}$ • 3,2 • $\frac{203406}{100}$ • 0,045.

Cette situation proche de situations existantes d'introduction l'écriture décimale (cf. par exemple l'ouvrage Ermel - Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1) permet éventuellement de la revisiter en lien avec le tableau de numération. Si à l'origine telle que citée ci-avant, nous l'avions davantage pensée pour la classe de Sixième, nous l'avons expérimentée à différents niveaux, avec quelques variations : présence ou absence de l'écriture décimale, de grands nombres, etc.

Dans tous les cas, une telle situation permet de mettre en discussion un certain nombre de points que nous jugeons essentiels, y compris sur les conventions liées au tableau de numération et à ses usages (parfois assez impensés):

- Un ou plusieurs chiffres par colonnes ?
  L'usage traditionnel est un chiffre par colonne. Toutefois on peut le questionner. Par exemple, indiquer 10 dans la colonne des milliers au lieu du rajout d'une nouvelle colonne (dizaine de milliers) est tout à fait valide. Un échange à ce sujet avec les élèves peut être intéressant. Si on autorise l'usage de plusieurs chiffres par colonnes, le tableau peut d'ailleurs devenir un outil pour faire apparaître les conversions entre unités de numération ou des égalités du type « 108 unités = 10 dizaines et 8 unités = 1 centaine, 0 dizaine et 8 unités » ou « 423 centièmes = 42 dixièmes et 3 centièmes = 4 unités, 2 dixièmes et 3 centièmes)

[1] Nous conseillons aux enseignants de donner ce tableau avec des espaces à droite et à gauche

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités
			108
		10	8
	1	0	8

Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
		423	
	42	3	
4	2	3	

- L’absence de virgule dans le tableau de numération, l’ajout de nouvelles colonnes à droite de l’unité (dixièmes, centièmes, millièmes).
  Sans que nous ne sachions trop pourquoi, il est souvent d’usage d’apposer la virgule dans le tableau (soit avec une pseudo-colonne spécifique, soit en l’écrivant proche du trait séparant unités et dixièmes). Ceci nous semble critiquable, voire à bannir. D’une part, cela provoque une rupture dans l’usage de lecture d’un nombre au sein du tableau de numération, qui se traduit parfois par des erreurs d’élèves du type lire 2,5 comme 2, 5 dixièmes. D’autre part, cela peut renforcer une certaine dissymétrie apparente entre les unités de numérations correspondant aux dixièmes, centièmes… et à celles correspondant aux dizaines, centaines…
  Enfin et c’est sans doute l’argument le plus essentiel de notre point de vue, tout comme la position dans l’écriture chiffrée d’un nombre entier, précisément, la virgule prend tout son sens quand en l’absence des unités de numération, elle devient un marqueur positionnel permettant de « situer » l’unité dans l’écriture décimale d’un nombre décimal. De notre point de vue, c’est au moment de « sortir » le nombre du tableau (avec un discours explicite à ce sujet) qu’elle doit donc apparaître.

- Même si ce n’est pas directement en lien avec l’activité proposée, notons d’ailleurs les usages différents des tableaux liés à la numération et à la mesure, qui correspondent de fait à des usages différents de la virgule dans l’écriture d’un nombre décimal et dans l’écriture d’une mesure. La virgule d’indicateur d’une unité absolue (« toujours la même » dans l’écriture chiffrée) devient un indicateur de l’unité de mesure relative à laquelle on se réfère et qui peut être le cm, le m… Il nous semble y avoir un usage différent de la virgule qui peut être intéressant à expliciter quand on « sort » des nombres ou des mesures des tableaux de numération et/ou de mesure.

Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes
	2	5	5
1	7	3	4

25,5 et 173,4 (sous-entendu unités) mais on s’interdit (en lien avec l’usage

dam	m	dm	cm
	2	5	5
1	7	3	4

Dans 2,55 cm (écriture licite) la virgule indique la place de l’unité (que l’on choisit)

spécifique de la virgule dans la numération positionnelle) de produire des écritures du type 2,55 dizaines ou 17,34 dizaines	et ce qui suit la virgule respecte l'ordre des unités de longueurs

Ressource n° 3 : Comparer des nombres décimaux (CM1, CM2 et 6e) écrits sous différents formats

Nous avons pu constater à travers plusieurs observations dans les classes de CM2 et de 6e que dans la comparaison de nombres décimaux présentés sous l'unique format de l'écriture, les élèves décrivent des actions qui prennent appui sur l'écriture décimale (comme par exemple « rajouter un zéro » ou « comparer le chiffre des unités, puis celui des dixièmes » puis …).

A la condition d'une construction significative de l'écriture décimale faite en amont, des élèves paraissent tout à fait en mesure de justifier les techniques ainsi décrites (cf. exemple de justification donnée ci-après). Toutefois d'autres élèves semblent ne retenir que les actions sur l'écrit sans leur justification, dégradant parfois ces techniques, faute d'en comprendre le sens : quand par exemple un élève affirme que 2,34 et 2,034 sont égaux car il suffit de rajouter un zéro à 2,34.

La comparaison de nombres décimaux écrits sous différents formats nous paraît dès lors importante. Voici quelques exercices, expérimentés dans différentes classes :

Exercice n°1
Comparer 45 dixièmes et 440 centièmes.
Comparer 2+34/100 et 2,034.

Exercice n°2
Comparer 0,17 et 0,2
Comparer $\mathbf{3}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}$ et $\mathbf{4}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$
Comparer $\mathbf{5}+\frac{\mathbf{37}}{\mathbf{100}}$ et $\frac{\mathbf{54}}{\mathbf{10}}$

Exercice n°3
Range les nombres suivants dans l'ordre décroissant :
50 centièmes • 1,20 • 0,45 • 1 unité et 2 centièmes • 3/10 • 53/100

Exercice n°4
On veut comparer 2,12 et 2,7
Ci-dessous sont données différentes explications pour cette comparaison. Dire pour chacune d'elles si elles conviennent et expliquer pourquoi.
a) 2,7 < 2,12 parce que 12 > 7
b) 2,7 > 2,12 parce que 2,7 = 27/10 = 270/100 et 2,12 = 212/100
c) 2,7 > 2,12 parce que dans 2,7 il y a 58 centièmes de plus que dans 2,12

Ces différents exercices sont l'occasion de revenir sur la diversité des justifications possibles, exploitant différents registres de représentation des nombres décimaux (écriture à virgule, écritures fractionnaires) et de montrer la cohérence de ces justifications :

- 22,471 < 22,48 parce que 7 centièmes est plus petit que 8 centièmes
- 22,471 = 22 + 4/10 + 7/100 + 1/1000 et 22,48 = 22 + 4/10 + 8/100 et 7 centièmes est plus petit que 8 centièmes.
- 22,471 est plus petit que 22,48 parce que dans 22,48 il y a 9 millièmes de plus que dans 22,471

Ces différents exercices sont aussi l'occasion (parfois rare) de pointer la nécessité de faire des conversions entre registres de représentation des nombres décimaux pour pouvoir les comparer.

Pour comparer 3,7 et 3 et 689 millièmes
Je convertis
3,7 = 3 + 7/10
3 unités et 689 millièmes = 3 + 689/1000 = 3 + 6/10 + 8/100+ 9/1000
Je compare 7/10> 6/10
Donc 3,7 est plus petit que « 3 et 689 millièmes »
Ou bien 7 dixièmes (dans l'écriture de 3,7) est égal à 700 millièmes qui est plus grand que 689 millièmes

Ressource n°4 : Applications

Est présentée ci-dessous une sélection d'exercices mettant en fonctionnement certains des aspects travaillés dans les ressources précédentes en lien avec la numération décimale positionnelle. Ces exercices sont une occasion de travailler des techniques liées à ces savoirs.

Exercice n°1
Recopier et compléter les phrases suivantes
a. 8 dixièmes de m = 8 …
b.32 centièmes de m = 32 …
c. 565 millièmes de m = 565 …

Exercice n°2
Recopier et compléter :
a. $\frac{5}{10}$ m = 5 ….
b. $\frac{8}{100}$ m = 8 ….
c. $\frac{27}{1000}$ m = 27 ….

Pour les exercices 3 à 5, il faudra entrer sur la calculatrice des écritures décimales ou fractionnaires.
1. Le point décimal [.] remplace la virgule :

Exercice n°4
Avec les mêmes règles du jeu, passer de :
a. huit et deux cent sept millièmes à 8,237
b. neuf et trente-six centièmes à 9,4
c. quatre-vingt-douze centièmes à 1

Exercice n°5
Afficher sur l'écran de la calculatrice le nombre 3,27
1. Sans éteindre la calculatrice et sans effacer aucun des chiffres, faire apparaître le nombre 3,57 en tapant sur le minimum de touche ET sans utiliser la touche [.]
2. Écrire en ligne le calcul effectué à la calculatrice.

Exercice n°6
Matériel nécessaire
• Une calculatrice
• Un dé-signe constitué par un dé à jouer sur

1.23 signifie 1,23
2. La barre de fraction s'obtient avec la touche [/] ou avec la touche [-].

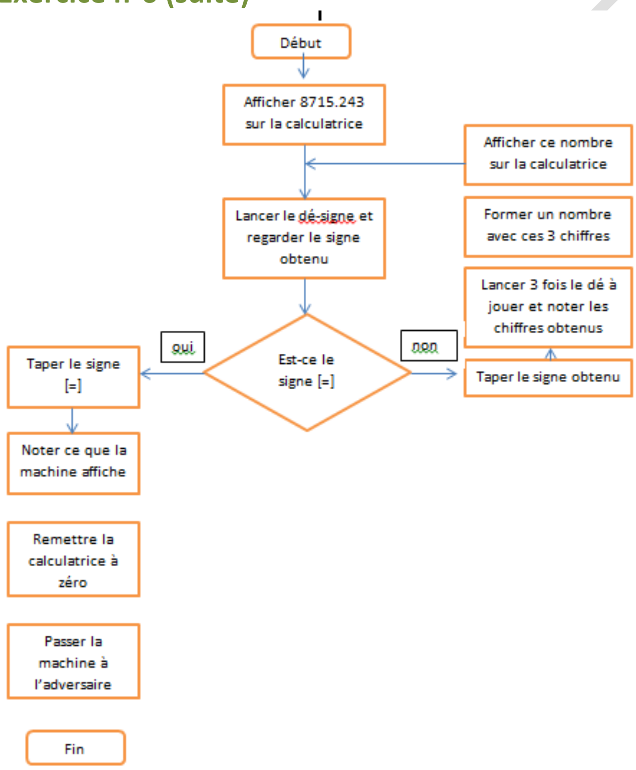
Exercice n°3

Afficher sur l'écran de la calculatrice le nombre quatre unités et vingt-trois centièmes.
a. Sans éteindre la calculatrice et sans effacer aucun des chiffres, faire apparaître le nombre 4,73 en tapant sur le minimum de touches
b. Écrire en ligne le calcul effectué à la calculatrice.

lequel on a remplacé, au moyen d'étiquettes autocollantes, les configurations habituelles par des signes : 2 signes [+] ; 2 signes [–] et 2 signes [=]
• Un dé à jouer

Règle du jeu
Le jeu se joue à un contre un.
Les actions à effectuer sont indiquées par l'organigramme ci-dessous
Le gagnant est celui qui, après addition de ses trois résultats, obtient le plus grand nombre.

Exercice n°6 (suite)



Exercice n°7

On s'intéresse à la famille de tous les nombres s'écrivant 0,…. (par exemple : 0,432 – 0,0370) Pour les nombres de cette famille, les phrases

Exercice n°8

a. Nous sommes les nombres de deux chiffres les plus proches de 7,48. Qui sommes-nous ?
b. Nous sommes les nombres de trois chiffres les plus proches de 2,439. Qui sommes-nous ?
c. Nous sommes les nombres de trois chiffres les plus proches de 56. Qui sommes-nous ?

Exercice n°9

On s'intéresse au nombre : 47,52.
a. Insérer le chiffre 1 pour « créer » six nouveaux nombres.
Ranger alors ces sept nombres par ordre décroissant.
b. Insérer le chiffre 0 pour « créer » de nouveaux nombres. Combien ?
Ranger alors tous ces nombres par ordre croissant.

Exercice n°10

1. Afficher sur l'écran de la calculatrice le nombre 85,57. Sans éteindre la calculatrice

suivantes sont-elles vraies ou sont-elles fausses ? Donner des exemples ou des contre-exemples.
Si un nombre s'écrit avec plus de chiffres qu'un autre alors il est le plus grand des deux.
On peut supprimer les zéros placés à droite du dernier chiffre d'un nombre sans changer ce nombre.
Il y a des cas où il est impossible « d'intercaler » un nombre entre deux nombres donnés.

et sans effacer aucun des chiffres, faire apparaître le nombre 812,68 en exactement « trois coups » et en utilisant uniquement les touches d'opérations [+] et [–]
2. Afficher sur l'écran de la calculatrice le nombre 20,16. Sans éteindre la calculatrice et sans effacer aucun des chiffres, échanger le « 1 » et le « 6 » en tapant sur un minimum de touches.

Ressource n°5 : Autres applications

3967,4563	Changer le chiffre des centièmes et celui des centaines sans changer les autres, en une seule opération.	
497,407	Changer le chiffre des centièmes et celui des dizaines sans changer les autres, en une seule opération	

Ressource n°6

Enigmes

Jeu ! Qui sommes-nous ?

a. Nous sommes les nombres de deux chiffres les plus proches de 7,48. Qui sommes-nous ?
b. Nous sommes les nombres de trois chiffres les plus proches de 2,439. Qui sommes-nous ?
c. Nous sommes les nombres de trois chiffres les plus proches de 56. Qui sommes-nous ?

Jeu ! Qui suis-je

a. J'ai trois chiffres. Je suis entre 5,7 et 5,8 et deux de mes chiffres sont identiques.

b. J'ai quatre chiffres. Je suis entre 12,3 et 12,4. La somme de mes chiffres est égale à 9.

Ressource n°7

Retrouver les différentes écritures d'un décimal dans l'ordre ci-dessus. A cet effet, une feuille partagée en 9 bandes va circuler entre les élèves d'un même groupe (de 7 élèves). Cette feuille est pliée au fur et à mesure de la transmission pour que l'élève qui la reçoit ne voie que l'écriture précédente selon l'illustration suivante :

Le premier élève reçoit cette feuille et écris sa réponse. Il replie la première bande pour cacher 4,627 et transmet.

4,627

Le deuxième élève reçoit ceci, écrit sa réponse, replie la deuxième bande et transmet

La bande supérieure cache 4,627
4 + 6/10 + 2/100 + 7/1000

Plusieurs nombres seront proposés aux élèves. Par exemple 4,627 – 14,28 – 7,03 - 0,324 – 200,075

Ressource n°8

Exercice n°1

Connaissant le résultat suivant : 542 – 213,7 = 328,3 et sans utiliser la calculatrice ni faire pratiquement aucun calcul complétez :

328,3 + 213,7 =
5420 – 2137 =
1542 – 213,7 =
542 – 203,7 =

542 – 328,3 =
0,542 – 0,2137 =
742 – 213,7 =
842 – 113,7 =

Expliquez vos réponses
Eventuellement, vérifiez avec la calculatrice

Exercice n°2

Vérifiez que 38,26 x 1,7 = 65,042

Complétez :

38,26 x 17 =
0,3826 x 170 =
19,13 x 3,4 =

3826 x 17 =
38,26 x 3,4 =
38,26 x 51 =

Ressource n°9

Matériel :
30 cartes rectangulaires de 2 cm sur 3 cm portant des nombres décimaux. Il est important que figurent des nombres entiers parmi ces nombres ainsi que différentes écritures d'un même nombre décimal (écriture à virgule, somme de la partie entière et d'une fraction décimale inférieure à 1 …).

Une droite numérique (segment de 75 cm de longueur au moins) munie de 5 graduations, chaque unité étant partagée en 10 parties égales.

On a intérêt à plastifier la droite graduée de façon à pouvoir écrire dessus au feutre effaçable ce qui permet de modifier les indications fournies et de changer l'intervalle proposé aux élèves. On pourra ainsi intercaler des nombres aux centièmes entre des nombres de la droite graduée écrits aux dixièmes ou même d'intercaler des nombres aux millièmes entre des nombres aux centièmes.

Les étiquettes

0,35	0,305	0,425	0,45
3,02	$3+\frac{2}{100}$	0,11	0,110
5,35	5,355	$5+\frac{35}{100}$	5

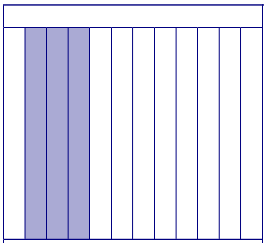
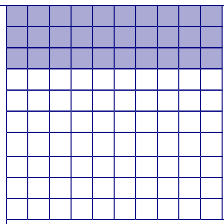
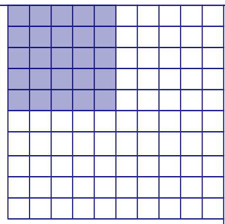
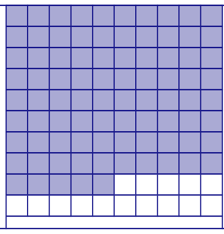
3	1	0,253	$\frac{425}{1000}$
$2+\frac{15}{100}$	0,222	2,2	2,023
1,15	$1+\frac{1}{10}+\frac{5}{100}$	1,334	1,343

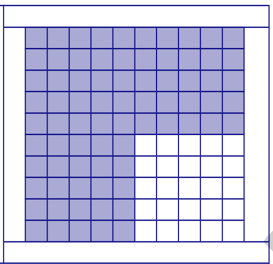
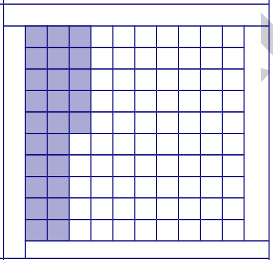
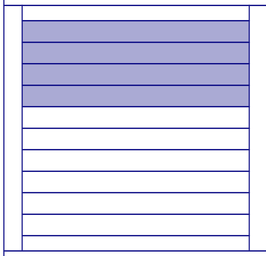
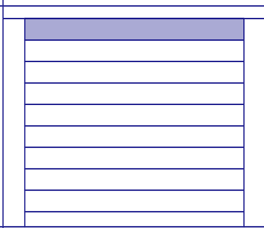
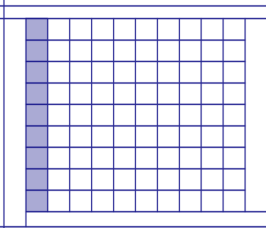
$1+\frac{39}{100}$	4,25	$\frac{425}{1000}$	3,32
5,35	5,355		

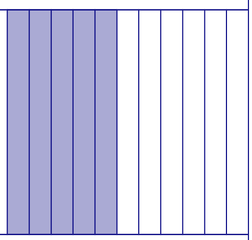
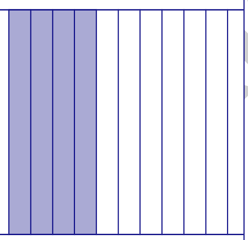
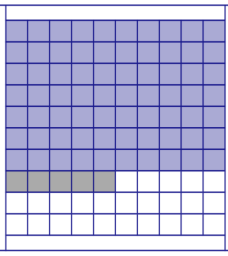
La droite graduée

Ressource n°10

Le jeu de bataille

	$\frac{3}{10}$	0,3	$\frac{85}{100}$
$\frac{30}{100}$	$\frac{400}{1000}$		
Trois dixièmes	0,1	$\frac{300}{1000}$	$\frac{75}{100}$
$\frac{1}{10}+\frac{2}{10}$	$\frac{2}{4}$		$\frac{850}{1000}$
$\frac{8}{10}+\frac{5}{100}$	$\frac{2}{10}+\frac{2}{10}$	0,85	0,25

$\frac{40}{100} + \frac{45}{100}$	$\frac{100}{1000}$	Quatre vingt cinq centièmes	
$\frac{25}{100}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{10}$	
	1/4	Un quart	Trois quarts
0,75			
$\frac{2}{10} + \frac{5}{100}$	$\frac{50}{100}$	$\frac{5}{100} + \frac{5}{100}$	Un dixième

$\frac{7}{10} + \frac{5}{100}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	0,5	$\frac{4}{8}$
$\frac{80}{100} + \frac{5}{100}$		Quatre dixièmes	
	0,4	$\frac{40}{100}$	$\frac{10}{100}$
$\frac{5}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{4}$	un demi

Ressource n°11

Les Cartes

1ère série de cartes				
5	$\frac{46}{10}$	45,067	20,8	$\frac{4567}{100}$
2,80	$\frac{2080}{100}$	5,0	$\frac{2080}{1000}$	2,8
2,08	$\frac{50}{10}$	$\frac{45670}{1000}$	4,6	$\frac{25}{1000}$
45,67	$\frac{250}{10000}$	$\frac{208}{100}$	0,025	$\frac{460}{100}$

1ère consigne : Découpe les cartes puis classe-les dans des paquets différents. Donne la raison de ton classement et écris la sur la feuille réponse n°1.

2ème série de cartes				
$5 - 0,4$	$2 + \frac{80}{100}$	$4 + \frac{60}{100}$	$45 + \frac{67}{100}$	$4 + \frac{10}{10}$
$\frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$	$45 + \frac{67}{1000}$	$2 + \frac{8}{100}$	$46 - 0,33$	$2 + 0,08$
$2 + 0,8$	$0,02 + \frac{5}{1000}$	$4 + \frac{6}{10}$	$20 + 0,8$	$45 + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}$

2ème consigne : Voici de nouvelles cartes. **Classe les dans les paquets déjà faits avec la 1ère série en respectant la raison précédente** (si "ça ne marche pas ", tu dois refaire un classement et donner la nouvelle raison de ce classement sur la feuille réponse n°2).

3ème série de cartes				
10 fois plus grand que 0,5	$10 \times 0,208$	10 fois plus petit que 46	208 : 100	50 : 10
100 fois plus petit que 4567	$0,46 \times 10$	25 : 1 000	45067 : 1000	$0,05 \times 100$
$0,28 \times 10$	208 : 10			

3ème consigne : Voici de nouvelles cartes. Même consigne que pour la 2ème série de cartes. Résume ce que tu as obtenu sur la feuille réponse n°3.

Adapté d'après « Liaison école collège. Les nombres décimaux en 6ème » IREM de Poitiers 1998

Présentation de l'activité et scénario possible.

Objectif de l'activité :

Cette activité vise à revenir en début de 6ème sur la connaissance des nombres décimaux, en particulier reconnaître un nombre sous différentes écritures et par là distinguer nombres et écritures.

Place dans la progression :

Cette activité peut être la première de l'année sur les nombres décimaux. Dans ce cas, elle permet au professeur (en écoutant ce qu'ils disent et en lisant ce qu'ils écrivent aux différentes étapes) de prendre de l'information sur les conceptions des élèves pour pourvoir si besoin les faire évoluer. Une synthèse est nécessaire en fin d'activité.
Un jeu de dominos est proposé en complément qui peut précéder dans les classes qui semblent d'un niveau faible ou qui peut faire suite pour les élèves qui se sont révélés en difficulté sur le sujet.

Analyse a priori de l'activité :

- Le but est de poursuivre et consolider les acquis de l'école élémentaire relatif à la numération. Elle amène les élèves à réactiver leurs connaissances en ce qui concerne l'écriture à virgule, l'écriture fractionnaire décimale, la multiplication par les puissances de 10.

Remarque liée à la mise en œuvre des nouveaux programmes en septembre 2005 : La division d'un entier une puissance de 10 dans le cas où le quotient exact n'est pas un entier ne fait plus partie des compétences attendues en fin de CM[1]. Cette activité est l'occasion de rencontrer une première fois de telles divisions, en leur donnant la signification du fractionnement en dixièmes, centièmes, millièmes etc...

- La présentation sous forme de cartes facilite l'entrée des élèves dans l'activité par l'aspect ludique et également par la possibilité de déplacer les cartes au fil des essais et du raisonnement des groupes.

- C'est une activité adaptée à un travail de groupe. La consigne est volontairement ouverte, ce n'est pas tant le résultat du classement qui importe (au moins pour les deux premiers) mais ce qui va s'exprimer lors de la recherche des critères, probablement se négocier entre élèves et donc se réfléchir.

- *Choix des séries.*

Elles sont présentées aux élèves par ordre croissant de difficulté. Dans la première les nombres décimaux sont présentés en écriture à virgule et sous forme de fraction décimale. Dans la deuxième ils sont présentés sous forme de décompositions liées aux puissances de 10 (les soustractions sont nécessaires pour écarter certains classements du type « écritures ayant les mêmes chiffres »). Dans la troisième série les nombres sont présentés sous forme d'un produit ou d'un quotient par une puissance de 10, en variant la formulation. Cette série doit permettre de faire le lien entre le vocabulaire lié à la position du chiffre dans le nombre et les multiplications et divisions par 10, 100, 1000 ...

- *Choix des nombres.*

Certaines cartes se ressemblent volontairement : elles font apparaître des nombres possédant les mêmes chiffres dans le même ordre mais avec un décallage des « rangs »(zéros ou virgules intercallés). L'objectif est d'attirer l'attention des élèves sur l'importance de la place des chiffres dans un nombre relativement au rang des unités.

[1] Seule la division euclidienne fait l'objet d'un travail systématique depuis les IO de 2002. Mais on peut penser que dans le cadre du travail sur la multiplication d'un décimal par 10,100,1000 en lien avec la numération le cas des divisions par 10,100,1000 a été rencontré et réfléchi dans certaines classes.

Adapté d'après « Liaison école collège. Les nombres décimaux en 6ème » IREM de Poitiers 1998

Scénario :

Deux séances d'une heure sont nécessaires à cette activité. (Pour les classes moins rapides, prévoir jusqu' à trois heures)

Organisation sociale : les élèves sont placés par groupes de trois ou quatre.

Organisation matérielle : les trois séries de cartes sont différenciées par la trame. Prévoir pour chaque groupe une série de cartes, trois feuilles réponse numérotées et une enveloppe pour ranger les cartes à la fin de chaque séance. Chaque groupe travaille sur la table. Au départ, les élèves préparent des ciseaux et un stylo.

1ère partie : Chaque groupe reçoit la première série de carte avec la première consigne.
« Découpez les cartes puis classez-les dans des paquets différents. Il faudra donner la raison du classement. »
Explicitation éventuellement nécessaire :
« Une carte ne peut pas être toute seule dans son paquet.
Une carte ne peut pas être dans deux paquets à la fois.
Vous devez vous mettre d'accord sur les paquets que vous faites. Sur la feuille numéro 1, vous écrirez le titre de chaque paquet.
Il ne doit pas y avoir un paquet 'poubelle' (où l'on met les cartes que l'on ne sait pas classer) »

Le rôle de l'enseignant se limite à réguler la dynamique de classe. Il n'intervient pas sur les savoirs en jeu : il n'explique rien, ne se prononce pas sur la validité de la réponse (à cette étape, plusieurs classements sont possibles, tous valables même si certains seront remis en cause par la suite)

2ème partie : Dès qu'un groupe a fini son classement et écrit la raison de son classement, il reçoit la deuxième série de cartes avec la deuxième consigne.
De nombreux groupes constatent alors qu'ils doivent remettre leur classement en cause (carte seule ou cartes inclassables). Le changement de point de vue est difficile. Le professeur doit inciter à relire et reformuler la consigne puis à se lancer dans la recherche d'un nouveau critère de classement : il ramasse la feuille numéro 1 et donne la feuille numéro 2.

3ème partie : Chaque groupe continue à son rythme. Dès que les paquets sont clairement identifiés, il reçoit la troisième série de cartes. Cette série permet de confirmer ou d'infirmer le classement.
L'observation des productions de chaque groupe permet à l'enseignant de préparer le travail d'exploitation de l'activité en classe entière : débat, validation et synthèse.

4ème partie :
Débat : Pour chaque groupe, ou seulement quelques uns bien choisis, un rapporteur indique le nombre de paquets obtenus et la raison du classement ». Le professeur exploite les différences annoncées et conduit le débat pour :
- faire énoncer le bon critère : regroupement des différentes écritures d'un même nombre
- déterminer le nombre de paquets : 8 nombres différents.

Validation : Chaque élève est placé en situation de travail individuel. Il doit tirer profit du débat collectif et vérifier personnellement qu'en groupant les différentes écritures d'un même nombre on obtient un classement recevable. Pour cela chacun reçoit à nouveau les trois séries de cartes et il doit par découpage collage faire un tableau récapitulatif des 8 'classes'. En général, ce travail est commencé en classe et terminé à la maison.

5ème partie : synthèse
Tout nombre décimal a plusieurs écritures et lectures ....
On peut également revenir sur les liens entre numération et multiplication, division par les puissances de 10.

Adapté d'après « Liaison école collège. Les nombres décimaux en 6ème » IREM de Poitiers 1998

5	$\frac{46}{10}$	45,067	20,8	$\frac{4567}{100}$
2,80	$\frac{2080}{100}$	5,0	$\frac{2080}{1000}$	2,8
2,08	$\frac{50}{10}$	$\frac{45670}{1000}$	4,6	$\frac{25}{1000}$
45,67	$\frac{250}{10000}$	$\frac{208}{100}$	0,025	$\frac{460}{100}$
5 – 0,4	$2+\frac{80}{100}$	$4+\frac{60}{100}$	$45+\frac{67}{100}$	$4+\frac{10}{10}$
$\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$	$45+\frac{67}{1000}$	$2+\frac{8}{100}$	46 – 0,33	2 + 0,08
2 + 0,8	$0{,}02+\frac{5}{1000}$	$4+\frac{6}{10}$	20 + 0,8	$45+\frac{6}{100}+\frac{7}{1000}$
10 fois plus grand que 0,5	10 × 0,208	10 fois plus petit que 46	208 : 100	50 : 10
100 fois plus petit que 4567	0,46 × 10	25 : 1 000	**45067 : 1000**	0,05 × 100
0,28 × 10	208 : 10			

5	$\frac{46}{10}$	45,067	20,8	$\frac{4567}{100}$
2,80	$\frac{2080}{100}$	5,0	$\frac{2080}{1000}$	2,8
2,08	$\frac{50}{10}$	$\frac{45670}{1000}$	4,6	$\frac{25}{1000}$
45,67	$\frac{250}{10000}$	$\frac{208}{100}$	0,025	$\frac{460}{100}$
5 – 0,4	$2+\frac{80}{100}$	$4+\frac{60}{100}$	$45+\frac{67}{100}$	$4+\frac{10}{10}$
$\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$	$45+\frac{67}{1000}$	$2+\frac{8}{100}$	46 – 0,33	2 + 0,08
2 + 0,8	$0{,}02+\frac{5}{1000}$	$4+\frac{6}{10}$	20 + 0,8	$45+\frac{6}{100}+\frac{7}{1000}$
10 fois plus grand que 0,5	10 × 0,208	10 fois plus petit que 46	208 : 100	50 : 10
100 fois plus petit que 4567	0,46 × 10	25 : 1 000	**45067 : 1000**	0,05 × 100
0,28 × 10	208 : 10			

Adapté d'après « Liaison école collège. Les nombres décimaux en 6ème » IREM de Poitiers 1998

Fiche d'auto correction

5	$\frac{46}{10}$	2,80	$\frac{208}{100}$	20,8	45,067	45,67	$\frac{25}{1000}$
$\frac{50}{10}$	$\frac{460}{100}$	2,8	$\frac{2080}{1000}$	$\frac{2080}{100}$	$45+\frac{67}{1000}$	$\frac{4567}{100}$	0,025
5,0	4,6	2 + 0,8	2,08	20 + 0,8	$45+\frac{6}{100}+\frac{7}{1000}$	$\frac{45670}{1000}$	$\frac{250}{10000}$
$4+\frac{10}{10}$	5 – 0,4	$2+\frac{80}{100}$	$2+\frac{8}{100}$	208 : 10	45067 : 1000	$45+\frac{67}{100}$	$\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$
10 fois plus grand que 0,5	$4+\frac{60}{100}$	0,28 × 10	2 + 0,08			46 – 0,33	$0{,}02+\frac{5}{1000}$
50 : 10	$4+\frac{6}{10}$		10 × 0,208			100 fois plus petit que 4567	25 : 1 000
0,05 × 100	10 fois plus petit que 46		208 : 100				
	0,46 × 10						

Adapté d'après « Liaison école collège. Les nombres décimaux en 6ème » IREM de Poitiers 1998

Jeu de dominos

60,05	56 centièmes	56	0,65	$\frac{6}{10}+\frac{5}{100}$	$50+\frac{6}{100}$	5,06	$60+\frac{5}{10}$
5,6	$60+\frac{5}{100}$	$6+\frac{5}{10}$	56,0	$\frac{5}{10}+\frac{60}{100}$	65	50 unités 6 centièmes	$5+\frac{6}{10}$
6 unités 5 centièmes	$5+\frac{6}{100}$	60,5	$50+\frac{6}{10}$	650 dixièmes	6,05	50,60	65 dixièmes

Consigne : découpe le jeu de 12 dominos et joue seul ou avec ton voisin, en associant les nombres égaux.

Jeu de dominos

60,05	56 centièmes	56	0,65	$\frac{6}{10}+\frac{5}{100}$	$50+\frac{6}{100}$	5,06	$60+\frac{5}{10}$
5,6	$60+\frac{5}{100}$	$6+\frac{5}{10}$	56,0	$\frac{5}{10}+\frac{60}{100}$	65	50 unités 6 centièmes	$5+\frac{6}{10}$
6 unités 5 centièmes	$5+\frac{6}{100}$	60,5	$50+\frac{6}{10}$	650 dixièmes	6,05	50,60	65 dixièmes

Consigne : découpe le jeu de 12 dominos et joue seul ou avec ton voisin, en associant les nombres égaux.

Intérêt de l'activité :
cette activité permet de bien réactiver la notion d'écritures d'un même nombre, en conservant l'aspect ludique de la précédente. Elle est plus facile pour deux raisons : d'une part la connaissance à mettre en oeuvre est donnée, d'autre part il n'y a que deux écritures qui se correspondent.

Adapté d'après « Liaison école collège. Les nombres décimaux en $6^{ème}$ » IREM de Poitiers 1998

Annexe : scénario développé de la situation de l'enveloppe des nombres (Fénichel et Taveau 2008)[2]

Tâche des élèves Déterminer mentalement la valeur d'une quantité représentée par un grand nombre d'étiquettes sur chacune desquelles est écrite une unité de numération (une unité, un dixième, un centième…) et/ou une puissance de dix (1/10, 1/100, 1/1000)

Matériel

- 14 étiquettes « un millième » et 8 étiquettes marquées « 1/1000 »
- 16 étiquettes « un centième » et 19 étiquettes marquées « 1/100 »
- 15 étiquettes « un dixième » et 9 étiquettes marquées « 1/10 »
- 7 étiquettes marquées « une unité » et 6 étiquettes marquées « 1 »
- 2 étiquettes de « une dizaine » et 2 étiquettes marquées « 10 »

Remarque : On peut éventuellement penser à enrichir la collection avec un plus grand nombre d'unités et des dizaines pour montrer la continuité entre les relations du type : 10 dixièmes = 1 unité et 10 unités = 1 dizaine

Organisation

Alternance entre travail collectif et travail par groupe de 4 ou 5 élèves.

Déroulement

Les élèves sont placés en groupe dès le début de la séance.

<u>Phase 1 (collective) : Présentation de la tâche</u>

Durée : 5-10 minutes

Les enveloppes sont distribuées à chaque groupe d'élèves et ces derniers sont engagés à découvrir son contenu.

Consigne 1 : « *Je vais vous distribuer une petite enveloppe, une par groupe. Vous pouvez l'ouvrir et me dire ce que contient cette enveloppe*. »

Les unités de numération et/ou fractions décimales écrites sur les étiquettes sont récapitulées collectivement (désignation orale mise en lien avec les deux désignations écrites possibles). L'enseignant pourra faire référence à des situations matérielles vécues auparavant (qui ont permis de travailler le « sens partage » : un dixième, c'est une unité partagée en dix). Les élèves sont informés du fait que le contenu des enveloppes est le même pour chaque groupe.

[2] DVD « Enseigner les mathématiques au cycle 3 » de Muriel Fénichel et Catherine Taveau – SCEREN – CRDP Académie de Créteil

Consigne 2 : « *Je vais vous demander de me dire quel est le nombre « caché » dans l'enveloppe, le nombre qui correspond à toutes ces étiquettes…* »

La recherche se fait mentalement.

Consigne 3 : *« tout doit se faire de tête, sans écrire avant d'avoir trouvé le nombre »*- « *Quand vous aurez terminé et seulement une fois que vous aurez terminé, vous écrirez sur votre enveloppe, au crayon à papier, le nombre trouvé* » « *Tous les groupes ont une enveloppe avec un contenu identique donc tous les groupes devraient trouver le même résultat*. »

Consigne 3bis (après des premières expérimentations) : *« tout doit se faire de tête, sans écrire avant d'avoir trouvé le nombre »* - « *Vous devez trouver une manière de disposer les étiquettes sur votre table de manière à ce que je puisse lire directement le nombre* » - « *Tous les groupes ont une enveloppe avec un contenu identique donc tous les groupes devraient trouver le même résultat*. »

Il y a des avantages et des inconvénients aux deux consignes :

- Première consigne : elle permet de faire directement le lien avec l'écriture décimale préalablement introduite - certains élèves de CM ont d'ailleurs produit des écritures intéressantes à ré-interroger par la suite essayant de faire apparaître des « groupements » dans l'écriture du nombre (par exemple en écrivant 4/13,24/35/22 !) – on peut repartir d'écritures à la fois exactes ou erronées par la suite pour interroger le sens de l'écriture décimale par rapport aux unités de numération. Les élèves ont parfois du mal à respecter la consigne (ils essaient d'écrire des calculs ou des « nombres intermédiaires » en se cachant)

- Deuxième consigne : elle met l'accent sur la position nécessaire pour « pouvoir lire » directement le nombre – ce qui permet par la suite de justifier des aspects liés à l'écriture décimale (rôle de la virgule, de rangs dans l'écriture chiffrée) préalablement introduite… Difficile toutefois de la « faire passer » et elle comporte en l'état quelques ambiguités délicates à négocier (que signifie « pouvoir lire directement le nombre » ? Un étayage délicat à prévoir du point de vue de l'enseignant qui ne doit pas non plus « trop en dire »…). Les élèves pensent toutefois pour une part, assez spontanément à cette organisation « en colonnes ».

<u>**Phase 2 (par groupe d'élèves) : recherche de la valeur du contenu de l'enveloppe**</u>

Durée : environ 15minutes

Les élèves doivent déterminer la valeur du contenu de l'enveloppe. L'enseignant passe de groupe en groupe pour : s'assurer que les consignes ont été comprises, que les contraintes sont prises en compte, observer et faire expliciter les procédures (en revenant éventuellement sur certaines erreurs du type confusion entre dixième et dizaine), encourager les élèves à persévérer.

Les problèmes de manipulation et d'organisation collective au sein d'un groupe sont parfois délicats à gérer (les auteures de la situation proposent par exemple des étiquettes de couleurs différentes d'un groupe à l'autre pour éviter que des collections d'étiquettes en viennent à se mélanger d'une table à l'autre)

Les élèves diront sans doute que cela les aide de faire des « paquets » avec les millièmes, centièmes, etc. L'enseignant peut dès lors leur proposer des trombones pour « constituer » des paquets de leur choix.

Les stratégies (pour regrouper et/ou convertir) si elles apparaissent dès cette première séance sont variées :

- Certains élèves peuvent faire des paquets par ordre d'unités (les dixièmes et/ou 1/10 ensemble, les centièmes et ou 1/100, ensemble, etc.)… stratégie peu efficace pour déterminer le nombre. On peut leur faire remarquer qu'ils n'utilisent pas les relations entre les unités (10 centièmes = 1 dixième).
- Certains élèves vont faire des paquets de 10 unités d'un certain ordre en distinguant les unités chiffrées et mots. Les amener à constater que 1/10 correspond bien à un dixième.
- Certains élèves vont faire des paquets de 10 unités d'un certain ordre (10 « un dixième » et/ou « 1/10 ») mais se retrouver bloqués pour organiser la conversion : les aider à organiser la conversion (en leur indiquant que le paquet de 10 « un dixième » et/ou « 1/10 » peut maintenant être considéré comme une étiquette « unité » et / ou « 1 »)

Deux types de stratégies peuvent être encouragés plus globalement (éventuellement par le biais d'une brève intervention collective de l'enseignant – voire lors de la phase de mise en commun, si une reprise est envisagée) :

- Aller « des plus petites unités aux plus grandes » (des unités du plus petit ordre aux unités de plus grand ordre), puis on compte le nombre d'étiquettes ou paquets d'étiquettes de chaque ordre
- Essayer de faire la plus grosse unité possible : par exemple pour faire une unité, je prends 10 dixièmes puis je regarde si j'ai de quoi faire une nouvelle unité avec les dixièmes restant et/ou les centièmes (qui regroupés donnent des dixièmes), etc.
- Dans tous les cas, organiser les unités / paquets d'unités peut paraître pratique : cela peut commencer à amener l'idée de position pour « repérer » l'ordre des unités / paquets d'unités.

A la fin du temps imparti, selon la consigne donnée initialement (consigne 3 ou 3bis), l'enseignant invite les élèves à écrire le nombre sur l'enveloppe et à y ranger les étiquettes données ou bien à laisser leur table en l'état (en prenant éventuellement des photos à utiliser lors de la mise en commun sur un TBI).

Phase 3 (collective) : mise en commun

Durée : environ 15 minutes

À l'issue de la phase d'action, une phase de formulation est nécessaire pour faire émerger les difficultés survenues.

Les différentes procédures utilisées par les groupes sont explicitées et mises en évidence.

Selon les procédures observées dans la classe, on met en avant le succès des procédures relevant de groupements-conversions entre unités de numération, parfois organisées de manière systématique (du plus petit au plus grand ou inversement).

Ou bien si la tâche a posé problème à une majorité d'élèves, l'enseignant peut conclure en prenant appui sur le travail de certains groupes à la nécessité de « faire des paquets » (par paquets soit d'unités de numération / puissances de dix correspondantes : 1/10 et dixièmes, etc.) mais aussi de convertir, en rappelant ce qui peut dans les situations passées les aider à identifier des relations entre unités (en évoquant les situations vécues, souvent liées au partage d'une unité en dix dixièmes, d'un dixième en dix centièmes, rencontrées préalablement). La situation peut dès lors être rejouée une deuxième fois et on ne va pas vers la dernière phase ci-dessous

Phase 4 (collective) : Retour sur…

Durée : environ 15 minutes

Cette phase collective peut soit se gérer dans un après coup ou à l'issue d'une première séance, soit à l'issue d'une reprise / deuxième séance.

On dévoile un grand tableau de numération et des étiquettes (sur une grande affiche avec des étiquettes plus grandes et pâte adhésive / prévoir les trombones ou des étiquettes supplémentaires pour marquer les étapes de conversion… un usage du TBI peut également être envisagé). On organise les regroupements / conversion liés à une stratégie. L'enseignant peut prendre appui sur ce qu'ont peut-être fait certains élèves en « ordonnant » les étiquettes et les paquets d'étiquettes.

La stratégie la plus simple à expliciter est sans doute la remontée « des plus petites unités aux plus grandes » (car c'est celle qui fait ressortir le principe de groupement).

Les autres stratégies possibles peuvent être évoquées plus ou moins partiellement selon le temps qui reste, l'aisance constatée des élèves durant la phase de recherche, etc.

Note : pour les élèves en difficulté, on peut reprendre de manière complète l'exposition et la reprise de la stratégie des plus petites unités aux plus grandes dans un tableau en petit groupe (travail différencié).

Si elle n'a pas été (ré-)introduite avant, cette situation peut représenter l'occasion de (ré-)introduire l'écriture décimale, avec la virgule ! On peut forcer la lecture 3,15 à l'oral « 3 unités 1 dixième et 5 centièmes » ou « 3 unités et 15 centièmes » et non « trois virgule quinze », en continuité de cette situation.

Phase 5 (individuelle ou par groupe de deux élèves) : premiers exercices de réinvestissement

Quelques exercices de réinvestissement individuel, par exemple :

Ecrire l'écriture chiffrée du nombre correspondant à

12 centièmes, 5 dixièmes et 3 unités

52 dixièmes, 12 centièmes 3 millièmes

Etc.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10

10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité

une unité	une unité	une unité	une unité	une unité
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité
une unité	une unité	une unité	une unité	une unité

une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine
une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine	une dizaine

un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième
un dixième	un dixième	un dixième	un dixième	un dixième

un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième
un centième	un centième	un centième	un centième	un centième

un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième
un millième	un millième	un millième	un millième	un millième

Vers le cycle 4

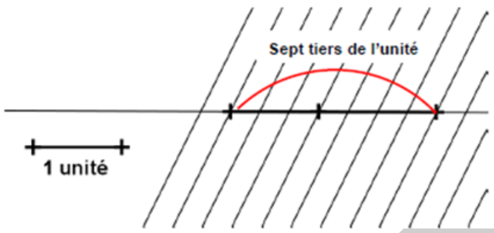
La situation des automates : construction de la fraction « quotient »

Le contexte

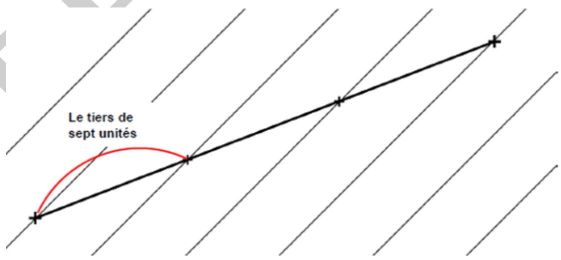
Le cycle 3 est le lieu de la rencontre de deux conceptions attachées à la fraction, une rencontre organisée successivement :

- Dans un premier temps la conception “partage” des fractions : ¼ est appréhendée comme le partage en 4 de l’unité, ¾ est alors vu comme 3 fois ¼ et attaché à la locution “trois quarts”
- Dans un second temps, la conception “quotient” de la fraction : il s’agit de passer du point de vue “trois quarts” à celui du “quart de trois”, un changement de point de vue nécessaire et une première étape pour officialiser par la suite ce que les programmes affichent comme “*a/b est le nombre qui multiplié par b donne a*”

Dans le contexte particulier des longueurs, la différence de point de vue s’illustre ainsi :



Sept tiers de l’unité



Le tiers de sept unités

Dans ce même contexte, illustrer *l’équivalence* de ces deux points de vue consiste à *montrer* que sept tiers de l’unité est égal au tiers de sept unités

Ce passage du point de vue *partage* à celui de *quotient* d’une fraction est une avancée importante dans la mise en place de la définition attendue dans les programmes : « a/b est le nombre qui multiplié par b donne a ».

Ce passage est aussi l’occasion d’une revisite des nombres décimaux. Ainsi, par exemple le nombre décimal 1,6 est 16 dixièmes est également le dixième de 16, c’est à dire par la suite le nombre qui multiplié par 10 donne 16. En généralisant cette locution, on obtient ainsi une nouvelle caractérisation des nombres décimaux mise en cohérence avec des caractérisations plus anciennement installées : un nombre décimal est un nombre qui multiplié par 10, 100, 1000… donne un nombre entier.

Principe général d'organisation des séances

Les séances détaillées ci-après proposent d'introduire progressivement la conception "quotient" des fractions. Ces différentes séances s'articulent autour de l'étude du déplacement de robots. Les élèves sont ainsi appelés à étudier et caractériser la longueur des sauts de robots pour pouvoir les distinguer. Le travail capitalisé autour de la caractérisation des longueurs des sauts des robots permet d'introduire une caractérisation fractionnaire de ces mêmes longueurs de sauts : *une longueur de saut de "5 unités en 3 sauts" sera noté 5/3. 5/3 désigne alors la longueur du saut.*

Ce passage constitue un point d'importance dans le parcours d'étude proposé. Une fois ce passage établi, les élèves fréquentent alors un ensemble de tâches dévolues à donner le statut de nombre à cette nouvelle écriture en proposant d'opérationnaliser la somme, la différence, le produit par un entier ou encore la division par un entier de ces nombres écrits sous forme fractionnaire.

Séance n°1

La situation n°1 s'inscrit dans le champ des situations de communication. Elle s'appuie sur une ressource informatique utilisant le logiciel Scratch (joint à ce scénario) et la mise à disposition de cette ressource aux élèves (utilisation de tablettes, d'ordinateurs pour la diffusion…).

Activité n°1

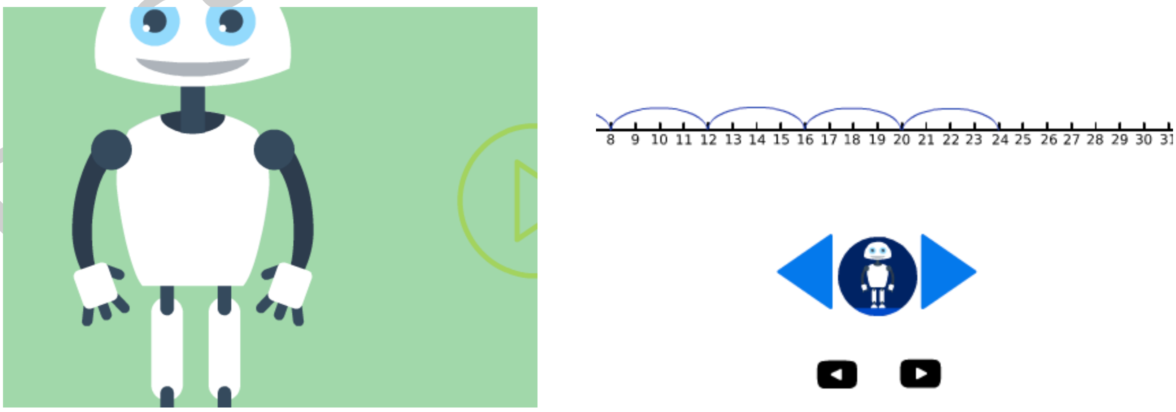
Mise en route de la situation

Les élèves sont disposés par équipes de quatre ou cinq. L'enseignant présente la situation à l'aide du fichier "situation n°1" vidéo-projeté à l'ensemble de la classe.

Le professeur présente d'abord le cadre général de la situation en s'appuyant sur la première ressource du fichier "situation n°1" simulant le déplacement d'un robot sur une droite graduée.

Consigne aux élèves

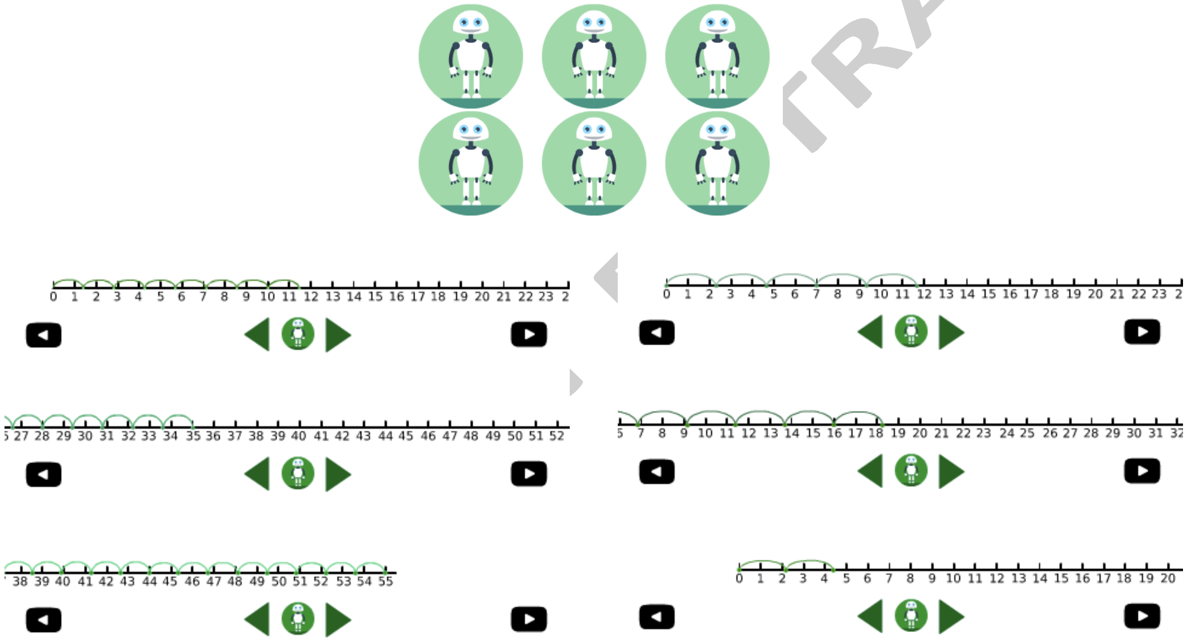
"Nous allons examiner aujourd'hui le déplacement de robots. Les robots que nous allons étudier se déplacent en effectuant des sauts comme le fait par exemple ce robot que nous voyons se déplacer ici"



Situation n°1 : Ressource n°1

Le professeur présente ensuite la seconde ressource du fichier “situation n°1” présentant six robots et leurs déplacements respectifs sur une droite graduée.

“Nous allons faire connaissance avec six robots : Néo - Tyméo - Pablo - Réno - Yako et Vanéo. Ils se déplacent tous en effectuant des sauts. Mais chacun d’eux saute de façon différente. Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner chacun des robots autrement que par leur nom, de les désigner uniquement d’après leur saut. Attention, pour faire ce travail, vous ne disposez d’aucun instrument. Vous devez rédiger un message qui permette de désigner chaque robot.”



Situation n°1 : Ressource n°2

Déroulement

Les élèves sont incités dans cette première phase à échanger autour de système de désignation. Les désignations du type “il atteint 3 en 4 sauts” sont visées. Dans cette phase, l’enseignant intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s’il s’aperçoit que les élèves ne respectent pas - ou simplement ont oublié - la consigne. En particulier, l’enseignant veille à disqualifier toute stratégie prenant appui sur la mesure de la longueur des sauts (il peut, pour ce faire, rappeler l’interdiction de tout instrument ou encore s’appuyer sur le fichier vidéoprojeté à la classe dans lequel la longueur des sauts n’est pas la même que sur la ressource à disposition des élèves).

Des désignations du type le plus grand saut ou le plus petit saut peuvent apparaître mais ce type de désignation sera disqualifié par la suite. De même, des désignations géographiques (le troisième robot en partant du bas) seront également disqualifiées par la suite.

Les six robots présentés dans la ressource aux élèves sont choisis ainsi : trois robots ayant un pas proche entre 1 et 2 : 10/7, 7/5 et 11/8 ; trois robots ayant un pas proche entre 2 et 3 : 7/3, 16/7 et 11/5.

Activité n°2

Mise en route de la situation

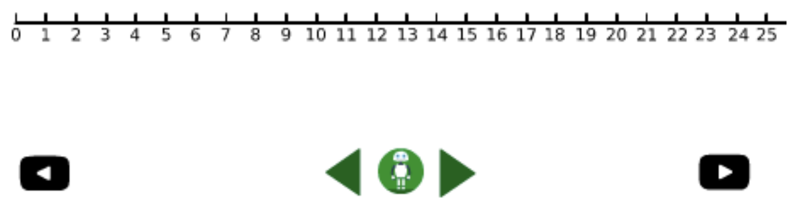
Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation, l'enseignant organise la seconde phase.

Consigne aux élèves

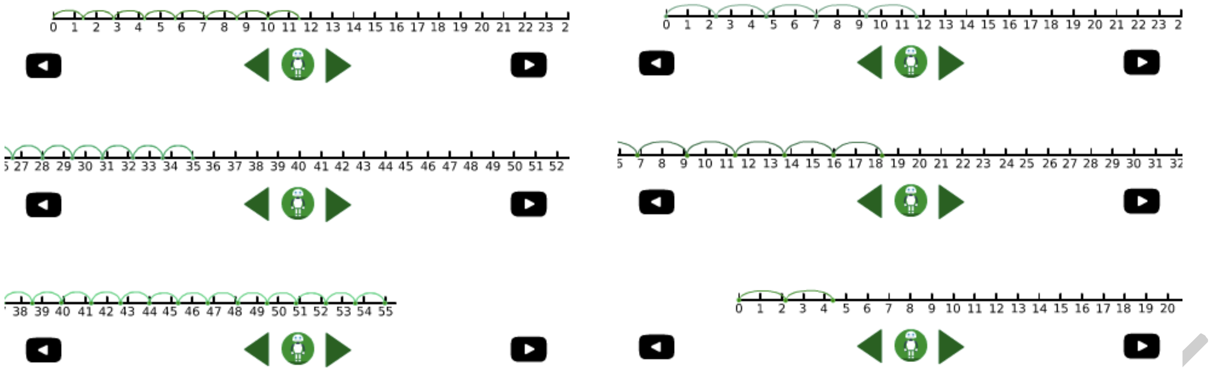
"Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu si la désignation des robots que vous avez inventée vous permet de reconnaître chacun des six robots."

Déroulement

Les groupes constitués se séparent en 2 catégories (des groupes émetteurs et des groupes récepteurs). Les élèves d'un même groupe utilisent un nouveau fichier (ressource n°3) dans lequel est présenté un unique robot choisi par le professeur parmi les six robots précédents. Les groupes émetteurs produisent un message qui devra permettre aux récepteurs de trouver parmi les six robots le robot désigné.



Situation n°1 : Ressource n°3 (groupes émetteurs)



Situation n°1 : Ressource (groupes récepteurs)

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs

Dans ce jeu de communication, le professeur :

- organise les groupes et leur roulement
- fait passer les messages des émetteurs au récepteurs
- reçoit les réponses des récepteurs
- va contrôler que ces réponses sont conformes au choix des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.

Pour une même équipe, tous les messages sont écrits sur une même feuille (le carnet de messages) qui porte le numéro de l'équipe. L'ensemble de ces carnets de messages est regroupé dans un même document pour être par la suite vidéoprojeté à l'ensemble de la classe.

Activité n°3

Mise en route de la situation

Les élèves sont dans cette phase regroupés par équipe (comme dans la phase n°1). Le professeur dispose au tableau du document regroupant l'ensemble des carnets de messages des équipes.

Consigne aux élèves

"J'ai regroupé au tableau les carnets de messages de toutes les équipes. Un "représentant" de chaque groupe va venir à tour de rôle au tableau lire les messages de son équipe et expliquer le code qu'ils ont utilisé"

Déroulement

A tour de rôle, chaque équipe envoie un "représentant" qui lit les messages échangés dans son équipe et explicite le code retenu. Les différents messages sont comparés par l'ensemble de la classe

Comme il existe possiblement une variété dans les messages, le professeur indique la possibilité d'adopter un code commun. Le code commun visé dans cette phase est du type :

"3 unités en 4 sauts"

Il est possible d'amener à ce moment de la situation une nouvelle désignation si une variété de désignations équivalentes (par exemple "6 unités en 8 sauts") n'est pas apparue et questionner les élèves sur cette nouvelle désignation.

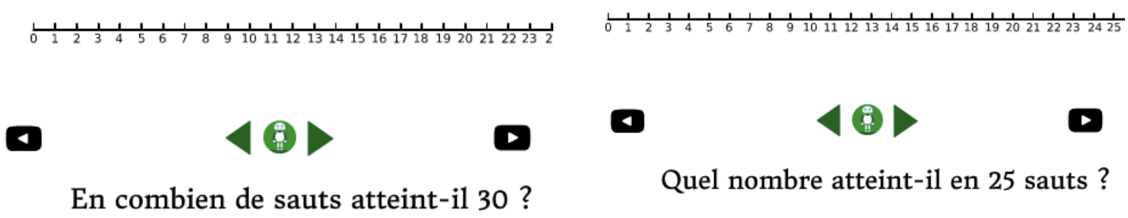
La comparaison des différentes désignations des robots permet de faire formuler différents phénomènes :

- pour un même robot, s'il fait deux fois plus de sauts, il ira deux fois plus loin
- pour deux robots différents, à un même nombre de sauts correspondent des longueurs différentes
- pour deux robots différents, à une même distance parcourue correspondent des nombres de sauts différents.

Remédiation – Différenciation

Les élèves disposent d'une ressource présentant un des six robots étudiés mais dans laquelle uniquement les premiers sauts du robot sont accessibles. Ils doivent répondre aux questions posées dans la ressource : par exemple, en combien de sauts ce robot atteint-il 14 ? Quel nombre atteint-il en 10 sauts ?

Les élèves peuvent vérifier leurs réponses à partir de la ressource complète



Ressource Remédiation

Exercice

Les élèves sont invités à discuter et justifier de différentes désignations proposées par le professeur et d'expliquer en quoi cela ne convient pas en justifiant leurs propos

Par exemple :

Pour un même robot :

Robot 1 : 7 unités en 2 sauts et 7 unités en 3 sauts.

Robot 2 : 15 unités en 4 sauts et 30 unités en 9 sauts

Robot 3 : 13 unités en 9 sauts et 25 unités et 18 sauts

Robot 4 : 19 unités en 3 sauts et 20 unités en 4 sauts

Cet exercice vise à produire des discours sur la non équivalence de robots. Ci-dessous des types de discours possibles :

- 7 unités en 2 sauts et 7 unités en 3 sauts : ce n'est pas possible car le robot atteint 7 en faisant des nombres de sauts différents
- *1*5 unités en 4 sauts donc 30 unités en 12 sauts et comme 12 différent de 9 - on revient au cas précédent
- Le 3e robot permet de comparer les nombres d'unités cette fois pour le même nombre de sauts.
- Le 4e robot permet possiblement un autre type de raisonnement du fait de la différence de 1. (*19 unités en 3 sauts et 20 unités en 4 sauts : 1 unité en 1 saut – faux)*

Autre exercice

Un tableau est fourni par le professeur dans lequel est présenté 5 robots et différentes désignations. Il s'agit pour les élèves d'examiner ces désignations et d'identifier celles qui seraient possiblement erronées en justifiant.

Les élèves sont ensuite invités à déterminer si parmi ces robots, certains d'entre eux n'ont pas déjà été rencontré en justifiant leurs propos.

Robots	Désignation 1	Désignation 2	Désignation 3
A	28 unités ; 9 sauts	112 unités ; 36 sauts	54 unités ; 18 sauts
B	110 unités ; 50 sauts	66 unités ; 30 sauts	10 unités ; 5 sauts
C	70 unités ; 50 sauts	130 unités ; 100 sauts	21 unités ; 15 sauts
D	16 unités ; 4 sauts	5 unités ; 1 saut	80 unités ; 20 sauts

Le bilan proposé par le professeur permettra d'identifier que l'on peut produire une infinité de couples désignant un même robot. Il permettra de mettre en forme un discours sur l'équivalence de désignations d'un même robot et ce qui permet de produire ces différentes désignations.

Phase n°4

Le professeur re-donne à voir à la classe le ou les tableaux construits lors des séances précédentes. Il demande aux élèves de rappeler les objectifs des séances précédentes : “Pouvez-vous rappeler ce que vous avez fait au cours des dernières leçons ? Quel était le but de ces leçons ?”

Ce rappel permet de voir si les objectifs ont été bien cernés et bien compris. Il résume ensuite leurs interventions

« vous avez découvert une méthode pour désigner les différents robots. Vous avez découvert que l'on pouvait désigner un même robot de différentes manières équivalentes »

Robots	Désignation 1	Désignation 2	Désignation 3
A	28 unités ; 9 sauts	112 unités ; 36 sauts	~~54 unités ; 18 sauts~~
B	110 unités ; 50 sauts	66 unités ; 30 sauts	~~10 unités ; 5 sauts~~
C	70 unités ; 50 sauts	~~130 unités ; 100 sauts~~	21 unités ; 15 sauts
D	16 unités ; 4 sauts	~~5 unités ; 1 saut~~	80 unités ; 20 sauts

Le professeur choisit d'introduire une nouvelle écriture de désignation en concertation avec la classe pour chacun des robots à partir de ce tableau.

Robots	Désignation 1	Désignation 2	Désignation 3
A	(28 ; 9)	(112 ; 36)	~~(54 ; 18)~~
B	(110 ; 50)	(66 ; 30)	~~(10 ; 5)~~
C	(70 ; 50)	~~(130 ; 100)~~	(21 ; 15)
D	(16 ; 4)	~~(5 ; 1)~~	(80 ; 20)

Les élèves sont invités à produire une nouvelle colonne avec une nouvelle désignation de leurs choix pour chaque robot en adoptant la nouvelle écriture.

Le professeur demande ensuite oralement quel robot désigne des couples donnés : par exemple « le couple (7 ; 5) désigne quel robot ? »

Phase n°5

Le professeur à partir du tableau précédent éventuellement enrichi engage les élèves dans une nouvelle tâche. Il s'agit maintenant de ranger les robots en fonction de la longueur de leur saut (de celui qui réalise le plus petit saut à celui qui réalise le plus grand saut.)

Robots	Désignation 1	Désignation 2	Désignation 3
A	(28 ; 9)	(112 ; 36)	(280 ; 90)
B	(110 ; 50)	(66 ; 30)	(11 ; 5)
C	(70 ; 50)	(140 ; 100)	(21 ; 15)
D	(16 ; 4)	(4 ; 1)	(80 ; 20)

E	(54 ; 18)	(540 ; 180)	(162 ; 54)
F	(8 ; 6)	(40 ; 30)	(24 ; 18)
G	(10 ; 2)	(50 ;10)	(25 ; 5)
H	(96 ;18)	(48 ; 9)	(144 ;27)

Ici, il est possible de faire vivre une grande variété de procédures de comparaison :

- en se ramenant au même nombre atteint, le robot ayant le plus petit saut sera celui qui fera le plus de sauts pour atteindre ce nombre.
- en se ramenant au même nombre de sauts, le robot ayant le plus petit saut sera celui qui atteindra le nombre les plus petit.
- ou encore pour comparer G et H : si ces deux robots avaient la même longueur de saut, G atteindrait 96 en 18 sauts et il resterait à faire un bond de 4 en 2 sauts, ce qui n'est pas possible…
- ou encore pour comparer G et H : on ne peut pas diviser 96 par 9 parce que ce n'est pas un multiple. Mais comme 9 x 10 = 90, on voit qu'il faut un peu plus de 10 sauts pour atteindre 2
- etc…

Ensuite, l'enseignant demande aux élèves de produire un autre robot (qui n'est pas équivalent aux précédents) et de le ranger parmi les robots existants.

Phase n°6 (passage à la désignation fractionnaire de la longueur du saut d'un robot)

L'enjeu de cette phase est d'arriver à la désignation standard de “fraction”. Le discours du professeur peut s'appuyer sur le discours suivant :

Un couple (par exemple 10;6) indique qu'un robot donné atteint telle distance en tant de sauts.

Tous les couples équivalents (par exemple (10;6) (5;3)) correspondent donc à un même robot. On dit qu'ils appartiennent à une même classe (on donnera un exemple de classe de couples)

Tous les couples indiquent - désignent un même robot - un même saut de robot… et on peut prendre n'importe quel couple d'une même classe pour reconnaître un robot (le saut d'un robot donné).

Si l'on veut désigner le saut d'un robot (la longueur du saut d'un robot) ; si l'on veut désigner toute la classe des couples et non plus un couple particulier, il faut inventer un nom et une écriture particulière. Cette écriture existe - en fait vous la connaissez déjà - on l'appelle “fraction”.

Par exemple : on dit que le robot A a une longueur de saut de “28 unités en 9 sauts” et on note 28/9. 28/9 désigne la longueur du saut du robot A.

Remarque : notons qu'à ce stade de la progression, la désignation de a/b par le vocable : « a sur b » est retenu (au profit du b$^{\text{ième}}$ de a). Le lien entre aspect fraction – aspect quotient de la fraction est scénariser plus tard dans la progression et sera l'occasion de distinguer et rapprocher les deux désignations de a/b : « a $b^{\text{ième}}$ et le $b^{\text{ième}}$ de a »

Exercice

Les élèves sont invités à :

- écrire avec cette nouvelle écriture les longueurs des sauts des différents robots.
- désigner la longueur du saut d'un robot de "14 unités en 7 sauts"
- indiquer ce que désigne "3/20" ?

Dans le scénario présenté précédemment, les élèves ont pour l'heure appris à désigner le saut d'un robot. Ils ont appris à produire différentes désignations, à les comparer, etc. L'enjeu est maintenant de donner le statut de nombre à ces écritures.

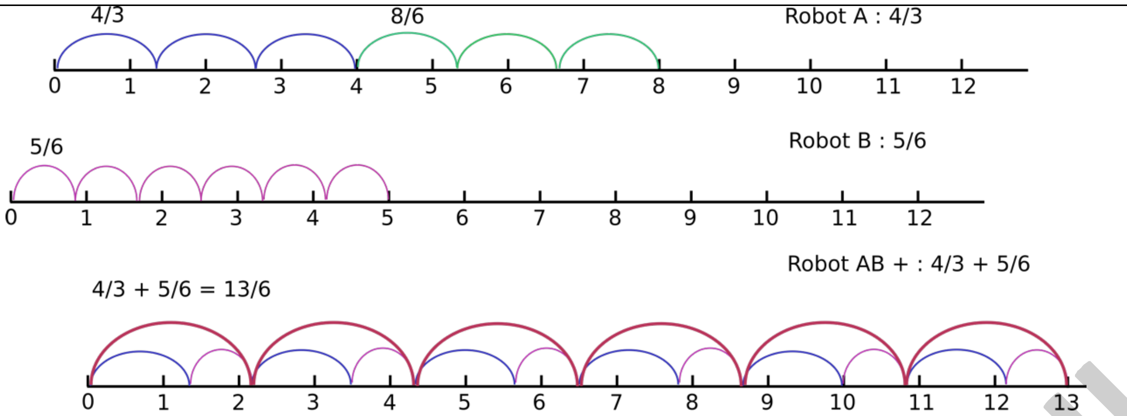
Pour « gagner » ce statut, il s'agit d'examiner s'il est alors possible de faire avec ces écritures ce que les élèves font avec les nombres qu'ils connaissent. En particulier, des opérations…

Dans ce travail, nous proposons d'examiner les différentes tâches associées à ces nombres, la possible scénarisation de la tâche dans le scénario, les procédures investies par les élèves et les ressources possiblement nécessaires.

Tâche n°1 : additionner des fractions

Scénarisation : Voici un robot A, quelle est la longueur de son saut (par exemple 10/50) ? Et un robot B (par exemple 40/100), quelle est la longueur de son saut ?
On désigne par AB+ le robot qui réalise un saut de longueur égale à la somme des longueurs des sauts des robots A et B. Peut-on prévoir la longueur du saut du robot AB+ ? Comment-peut-on la désigner ?

Procédures investies par les élèves et ressources à prévoir
Il s'agit ici d'effectuer la somme 10/50 + 40/100. Une procédure erronée attendue est 50/150. L'enseignant peut alors « mettre bout à bout » les deux trajets des robots A et B et le trajet du robot AB+. Mais alors les sauts ne seraient pas de même nature.
On peut envisager dès lors de disposer de la longueur de saut de chaque robot. Il s'agit alors de les « regrouper » deux à deux. On s'attend alors à ce que les élèves indiquent qu'il y a trop de sauts pour le robot B par exemple, qu'il faut le même nombre de sauts pour pouvoir effectuer les regroupements deux à deux.
Il s'agit ici d'expliciter la nécessité d'ajouter des longueurs des sauts puisqu'il y a le même nombre de sauts.



Dès lors, le calcul correct peut être produit 20/100 + 40/100 = 60/100
On peut par la suite proposer des sommes du type 17/50 + 5/25 + 13/25 ; 4/25 + 18/100 + 7/50, 5/6 + 3/8 etc.

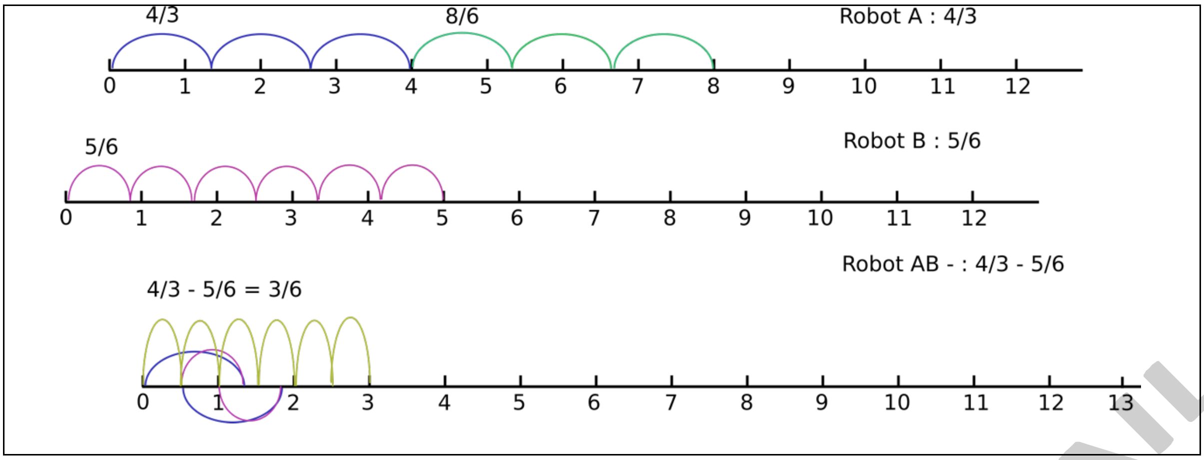
Remarque n°1 : il s'agit ici de proposer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Cela éviterait de confronter les élèves à l'enjeu même de la situation dans lequel il s'agit de décider de réduire au même nombre de sauts et de le faire pour que la somme des numérateurs, c'est-à-dire la distance atteinte par les robots ait un sens.
Remarque n°2 : dès lors que la désignation fractionnaire est introduite, il est possible lors de cette phase du scénario d'envisager une expression dans le registre littéral de la somme de deux fractions : a/b + c/b = (a+c)/b (mais aussi au regard des expériences conduites dans cette même phase de scénario des expressions du type a/b + c/d ≠ (a+c) / (b+d)
Remarque n°3 : les expériences conduites par les élèves pourront prendre plus tard la forme d'une démonstration dans le registre littéral. Cette démonstration classique (q = a/c et q'=b/c ; qc = a et q'c = b puis (q+q')c = a+b) est dès lors en correspondance stricte avec les expériences conduites dans la situation des automates.

Tâche n°2 : soustraire des fractions

Scénarisation : Voici un robot A, quelle est la longueur de son saut (par exemple 8/50) ? Et un robot B (par exemple 6/100), quelle est la longueur de son saut ?
On désigne par AB- le robot qui réalise un saut de longueur égale à la différence des longueurs des sauts des robots A et B. Peut-on prévoir la longueur du saut du robot AB- ? Comment-peut-on la désigner ?

Procédures investies par les élèves et ressources à prévoir
Il s'agit ici d'effectuer la différence 8/50 - 6/100.
On peut imaginer que les élèves, en référence à la tâche précédente, produisent des tentatives du type : 6/100 + …. = 8/50 (en référence au sens de la soustraction) puis 6/100 + ../100 = 16/100
D'autres raisonnements sont possibles :

- le robot A atteint 8 en 50 sauts. Il faut donc que je retire à chacun de ces 50 sauts la longueur du saut du robot B. Il faut donc retirer 50 sauts d'une longueur totale de 3. 8 – 3 = 5. Le robot AB- atteint donc 3 en 50 sauts, la longueur de son saut est 5/50.
- On veut retirer la longueur du saut du robot B à celle du robot A. 100 sauts du robot B vaut 6. Si l'on veut retirer 100 sauts du robot B aux sauts du robot A, il faut que le robot A fasse 100 sauts : 8/50 = 16/100. Il reste donc 100 sauts de longueurs (8/50-6/100) chacun. Ces 100 sauts permettent d'atteindre 16-6 = 10. Chacun de ces sauts vaut donc 10/100.



Remarque n°1 : il s'agit ici encore de proposer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Cela éviterait de confronter les élèves à l'enjeu même de la situation dans lequel il s'agit de décider de réduire au même nombre de sauts et de le faire pour que la somme des numérateurs, c'est à dire la distance atteinte par les robots ait un sens.
Remarque n°2 : dès lors que la désignation fractionnaire est introduite, il est possible lors de cette phase du scénario d'envisager une expression dans le registre littéral de la différence de deux fractions : a/b - c/b = (a-c)/b (mais aussi au regard des expériences conduites dans cette même phase de scénario des expressions du type a/b - c/d ≠ (a-c) / (b-d)
Remarque n°3 : les expériences conduites par les élèves pourront prendre plus tard la forme d'une démonstration dans le registre littérale. Cette démonstration classique (q = a/c et q'=b/c ; qc = a et q'c = b puis (q-q')c = a-b) est dès lors en correspondance stricte avec les expériences conduites dans la situation des automates.

Tâche n°3 : multiplier une fraction par un nombre entier

Scénarisation : On désigne par AX le robot qui réalise un saut de longueur égale à 4 fois la longueur du saut du robot A (3/19). Peut-on prévoir la longueur du saut du robot AX ? Comment peut-on le désigner ?

Procédures investies par les élèves et ressources à prévoir

Remarques éventuelles
Remarque n°1 : Notons que ces expérimentations et le discours attachée à ces dernières est à rapprocher avec la formulation plus classique dans le cadre des nombres lors de l'étude de la division. Par exemple, on établit à l'occasion de cette dernière étude des résultats du type « quand on fait une division, si l'on multiplie le dividende par un nombre sans changer le diviseur, le résultat de la division est multiplié par ce nombre ». Cette formulation peut être mise en correspondance avec les expérimentations menées.
De la même façon, le travail sur les désignations équivalentes fera écho à « quand on fait une division, le résultat ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre ou lorsque l'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre ». Ces propriétés permettent classiquement de justifier le passage de 1,8 : 1,5 en 18 : 15 mais plus encore permettent de reléguer au rang de calcul mental par exemple les calculs suivants : 18 : 1,5 ; 5 : 0,2 ; 17 : 0,5

Tâche n°4 : Evaluer si une fraction est plus petite ou plus grande que 1

Scénarisation :

Procédures investies par les élèves et ressources à prévoir

Remarques éventuelles

Tâche n°5 : diviser une fraction par un nombre entier

Scénarisation : On désigne par A : le robot qui réalise un saut dont longueur est 9 fois plus petite que la longueur du saut du robot A (18/7). Peut-on prévoir la longueur du saut du robot A : ? Comment peut-on le désigner ?

Procédures investies par les élèves et ressources à prévoir
Une procédure possible s'appuie sur le travail conduit sur la multiplication d'une fraction par un entier….
Le problème devient plus résistant pour un robot A du type (12/7), le numérateur n'étant pas divisible par 9.
Le problème devient donc à chercher une fraction égale à 12/7 de numérateur un multiple de 9.
Deux stratégies sont possibles : l'une, dans la continuité de la procédure déployée pour 18/7. Le fait que 12 ne soit pas divisible par 9 peut conduire les élèves à penser une autre désignation du robot (108/63) – l'autre, s'appuyant sur la dialectique multiplication-division : le robot A atteint 12 en 7 sauts, s'il fait des sauts 9 fois plus petits pour le même parcours, il en fait 9 fois plus : (12/63)

Remarques éventuelles
Notons que ces expérimentations et le discours attachée à ces dernières est en stricte correspondance avec la formulation plus classique dans le cadre des nombres lors de l'étude de la division. Par exemple, on établit à l'occasion de cette dernière étude des résultats du type « quand on fait une division, si l'on divise le dividende par un nombre sans changer le diviseur, le résultat de la division est divisé par ce nombre ». Cette formulation est en étroite correspondance avec les expérimentations menées.

Autres tâches (pour les plus rapides)

Donner deux sauts de robots dont la somme dépasse 3

Donner deux sauts de robots dont la différence est plus petite que 1

Etc…