

LES CHANGEMENTS DE REGARD NÉCESSAIRES SUR LES FIGURES¹.

Raymond DUVAL
Marc GODIN
IUFM Nord - Pas de Calais

Le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie. Mais c'est aussi le lieu de profondes équivoques didactiques.

En effet, l'organisation des objectifs d'enseignement, dès le primaire, donne la priorité aux droites, à leurs relations, à leurs propriétés. Et c'est en fonction de celles-ci que l'on fait travailler sur quelques figures de base (triangle, carré...). Cela conduit à valoriser les figures « un D » (1D)² ou les configurations de figures 1D (droites parallèles, droites perpendiculaires) par rapport aux figures 2D ou, tout au moins, à les mettre sur le même pied.

Or un tel ordre d'introduction des connaissances se heurte à la manière dont les figures sont perçues et interprétées en dehors des mathématiques. Ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme 2D, ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes 1D. Autrement dit, il y a une priorité cognitive des figures 2D sur les figures 1D. Quant aux points n'en parlons pas ! Hormis les sommets de polygones, ils ne sont visibles que par une marque qui les désigne. Autrement dit, la déconstruction dimensionnelle des formes impliquée par l'introduction des connaissances géométriques va à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes.

¹ Ce travail se réfère à une recherche financée par l'IUFM Nord-Pas-de-Calais et réalisée dans le cadre d'une équipe comprenant, outre les auteurs, Claire Gaudeul et Bachir Keskessa, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere.

² Nous suivons ici les notations classiques 1D, 2D, 3D dans lesquelles D est une abréviation du mot dimension, abréviation qui est aussi utilisée pour les images – on dit par exemple « image en 3D ». Il n'est pas inintéressant de rappeler que les premières définitions qu'Euclide donne d'une ligne ou d'une surface sont une description de la déconstruction dimensionnelle des figures : « *Les limites d'une surface sont des lignes* » (définition 6), « *Une figure est ce qui est contenu par quelques limites* » (définition 14). Euclide place la déconstruction dimensionnelle des figures au commencement de la géométrie, comme le seuil à franchir pour entrer dans la construction ou la découverte de connaissances géométriques. Et cela lui semble tellement évident qu'il ne s'y attarde pas. En est-il de même avec les jeunes élèves ?

Ce conflit entre la pratique géométrique des figures et le mode cognitif de leur reconnaissance soulève un problème difficile et décisif pour l'enseignement de la géométrie : comment amener les élèves à changer de regard sur les figures ? Comment les faire passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître le réseau de droites et de points sous-jacent aux différentes figures étudiées à l'école ? Ce passage exige un développement des capacités d'analyse visuelle des figures. Sans une telle transformation de la manière spontanée et prédominante de voir, toutes les formulations de propriétés géométriques risquent d'être des formulations qui tournent à vide.

On surprendra - et peut-être même cela choquera - en affirmant non seulement qu'un tel passage exige un travail de plusieurs années, mais surtout que les types d'activités faites en relation avec les figures ne permettent en rien aux élèves de changer leur manière de voir. L'un des types d'activités les plus courants concerne la reproduction ou la construction de figures. Or, dans ces activités, on ne prête pas suffisamment attention aux contraintes spécifiques d'analyse visuelle que chaque type d'instrument impose. Ainsi, la reproduction ne constitue pas un seul type de tâche, mais il y a autant de types de tâches de reproduction que de types d'instruments utilisés. La variation des instruments est une variable didactique essentielle, que les études consacrées à l'analyse des figures ne prennent pas en compte. (Bouleau 2001)

C'est ce problème du rapport aux figures dans l'enseignement de la géométrie et celui des moyens de le faire évoluer que nous allons étudier dans cet article. Nous le ferons en abordant les trois questions.

- Comment analyser une figure pour être capable de voir ce qu'il faut géométriquement y voir ?
- Quels types de tâche et quelles figures pour ces tâches pour faire changer la manière de voir des élèves ?
- Comment organiser des activités centrées sur l'analyse des figures ?

Voir une figure et l'analyser

Trois voies différentes pour analyser une figure

L'analyse d'une figure peut se faire selon au moins trois voies différentes. La première est évidemment celle de la perception : l'analyse se fait en fonction des formes (ou unités figurales) que l'on reconnaît et des propriétés visuelles de ces formes.

Les deux autres sont celles que l'enseignement de la géométrie cherche à développer. Il y a, d'une part, la connaissance de propriétés géométriques qui doivent être mobilisées en fonction d'hypothèses données : les propriétés géométriques doivent alors prendre le pas sur les formes visuellement reconnues pour analyser une figure. Il y a d'autre part des instruments très variés qui peuvent être utilisés pour reproduire ou pour construire une figure : l'analyse de la figure dépend des procédures de reproduction ou de construction que l'instrument utilisé impose.

Nous allons présenter brièvement chacune de ces trois voies, en insistant plus particulièrement sur l'analyse instrumentale. C'est en effet en jouant sur la variable qu'offrent les instruments, dans une situation de reproduction que l'on inversera chez les élèves, la prédominance très forte et durable d'une analyse perceptive sur une analyse géométrique de figures. Ainsi il y a des instruments qui font analyser une figure en termes d'unités 2D et d'autres en termes d'unités 1D. Les tâches de reproduction seront radicalement différentes selon le type d'instruments choisis.

En fonction des formes (ou unités figurales) que l'on reconnaît et des propriétés visuelles de ces formes.

Les formes 2D correspondent à des contours fermés. On peut donc distinguer dans une figure autant de formes 2D que de contours fermés. Mais, en réalité, les choses ne sont pas aussi simples. Car, dans une figure, on peut voir

- soit **autant de formes que de contours fermés** et on parlera dans ce cas d'« assemblage par juxtaposition »
- soit **moins de formes que de contours fermés** et on parlera alors d'« assemblage par superposition ».

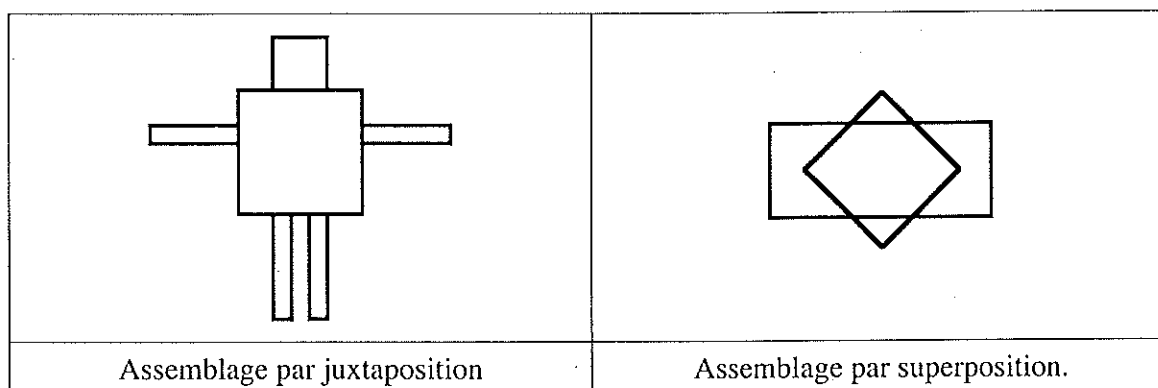


Figure 1 : Deux types d'assemblage figural de formes 2D

On voit alors la différence entre un assemblage par juxtaposition et un assemblage par superposition. Dans un assemblage par superposition, il y a une réduction importante des formes effectivement reconnues. Le premier intérêt didactique de cette distinction pour le choix des figures sur lesquels on pourra faire travailler les élèves est le suivant : les assemblages par superposition appellent visuellement le prolongement des tracés reconnus comme appartenant à une forme et non pas à une autre. L'activité de prolongement de tracés joue, comme on le verra plus loin, un rôle essentiel dans le passage des surfaces aux lignes. Dans l'exemple ci-dessus les deux formes superposées ont été tracées indépendamment l'une de l'autre, ce qui empêche de savoir si le carré est en dessus ou en dessous du rectangle. Cela correspond à la superposition de deux formes transparentes. Mais le choix étant fait, certains tracés peuvent être effacés.

Cependant, une telle distinction appelle des précisions importantes. Rien, par exemple, n'empêche de voir la figure de gauche comme un assemblage par superposition : les deux « bras » comme une seule et même forme rectangulaire et le contour de la « tête » comme étant dans le prolongement des « jambes ». Dans cet exemple, c'est seulement le caractère « figuratif » de la figure, qui constitue l'obstacle à ce changement de regard ; elle ressemble dans sa totalité à la silhouette d'un bonhomme et chaque partie de la figure, juxtaposée aux autres parties, ressemble à une partie du corps. Cette figure est fortement iconique au sens de Peirce. Ce ne pourra donc être qu'une activité graphique de prolongement de tracés qui donnera à cette figure son caractère géométrique et qui effacera sa forte iconicité ou sa figurativité.

En revanche, il y a une résistance perceptive intrinsèque à voir la figure de droite ci-dessus (Figure 1) comme un assemblage par juxtaposition, par exemple un assemblage de trois formes de types différents : triangles, pentagones concaves et hexagone convexe.

En fait pour passer d'un assemblage par superposition à un assemblage par juxtaposition comme dans la figure de droite ci-dessous (Figure 2), une activité graphique est souvent insuffisante. Pour cela, le recours à un coloriage, ou à des pièces matérielles de puzzle que l'on peut déplacer et ajuster les unes aux autres, s'avère indispensable. Autrement dit, il faut abandonner l'activité graphique pour celle de manipulations physiques de gabarits, ou de coloriages.

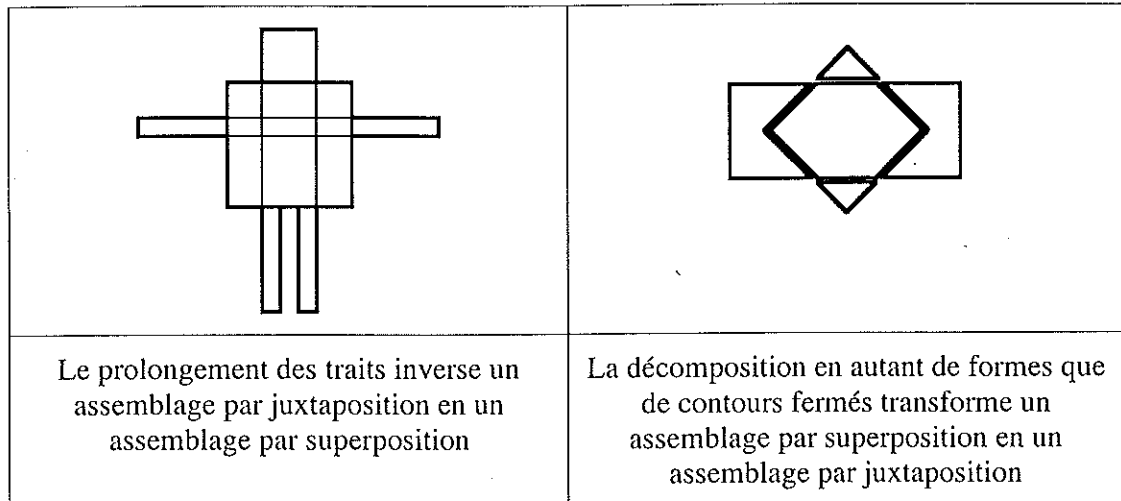


Figure 2 : Changement de regard et inversion du type d'assemblage

On voit donc l'ambivalence gestaltiste de toute figure plane dès que l'on y distingue au moins deux contours fermés (deux unités figurales 2D). Cette ambivalence tient au fait qu'elle peut être vue soit comme assemblage par juxtaposition, soit comme assemblage par superposition. *Mais lorsque l'un de ces deux regards s'est imposé - ce qui souvent se fait au premier coup d'œil - en changer requiert alors soit une activité graphique de prolongement de tracés soit une activité de manipulation et de déplacement de gabarits.*

Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, le regard n'identifie que les formes 2D - les surfaces - lesquelles correspondent aux contours fermés, et non pas les formes 1D qui sont les bords ou les séparations avec des points d'arrêts des formes 2D.

Cela conditionne le premier travail de l'enseignement : faire passer d'une analyse visuelle des figures en termes d'assemblages de surfaces (formes 2D) à une analyse visuelle en termes d'assemblages de lignes (formes 1D).

En fonction des hypothèses données et de la connaissance que l'on a des propriétés géométriques

Ce qu'on entend habituellement par « figure » est la superposition de marques discursives (hypothèses, codages) - qui donnent des propriétés géométriques - à la représentation d'une forme simple 2D ou d'un assemblage de formes 2D. Naturellement, on présuppose que les propriétés géométriques vont commander l'analyse de la représentation visuelle, laquelle est toujours particulière et modifiable. Autrement dit, on s'attend à ce que la représentation visuelle soit cognitivement subordonnée aux informations géométriques que l'on y superpose.

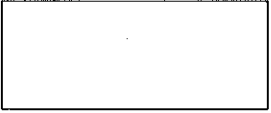
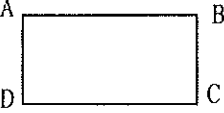
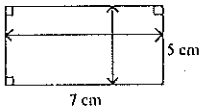
Généralement, quand on parle de « figure », on pense qu'on ne peut rien faire avec une forme visuelle comme ci-dessous,	mais	qu'il faut au moins des informations comme, par exemple, celles codées ci-dessous.
		 ou  ABCD est un rectangle

Figure 3. Les deux versants d'une figure en géométrie ?

Or c'est cette subordination cognitive de la forme visuelle aux informations données ou codées qui constitue un véritable obstacle à l'entrée dans la géométrie pour les élèves. En effet, pour qu'une telle superposition fusionne et fonctionne comme un tout dans lequel les propriétés géométriques l'emportent sur les évidences visuelles, une condition est cognitivement nécessaire. Il faut être capable de réorganiser la perception des formes 2D, c'est-à-dire une perception centrée sur les contours fermés, en la perception d'un ensemble d'unités visuelles 1D, car les propriétés géométriques portent essentiellement sur des relations entre ces unités 1D. *Cela revient à dire qu'analyser une figure en fonction de la connaissance que l'on a des propriétés géométriques présuppose la déconstruction dimensionnelle des représentations visuelles que l'on veut articuler aux propriétés géométriques.* Cela pose la question suivante : ce changement de regard qu'est la déconstruction dimensionnelle des formes, et qui est requis en géométrie et seulement en géométrie, peut-il être effectué sans mobiliser des connaissances géométriques ?

Pour mieux comprendre cette question, on peut revenir à la colonne de gauche dans le tableau ci-dessus (Figure 3) et se demander si une analyse qui ne soit pas seulement visuelle et qui ne soit pas guidée par des connaissances géométriques est possible. On voit tout de suite que le recours à des instruments pour construire ou pour reproduire la forme rectangulaire offre un moyen indépendant d'analyse.

En fonction des instruments dont on dispose pour la reproduire ou pour la reconstruire

Là, l'éventail des possibilités est non seulement très large, mais il est surtout très hétérogène.

On peut en distinguer au moins trois types (en ne prenant pas en compte les logiciels de construction) comme l'indique le tableau ci-dessous.

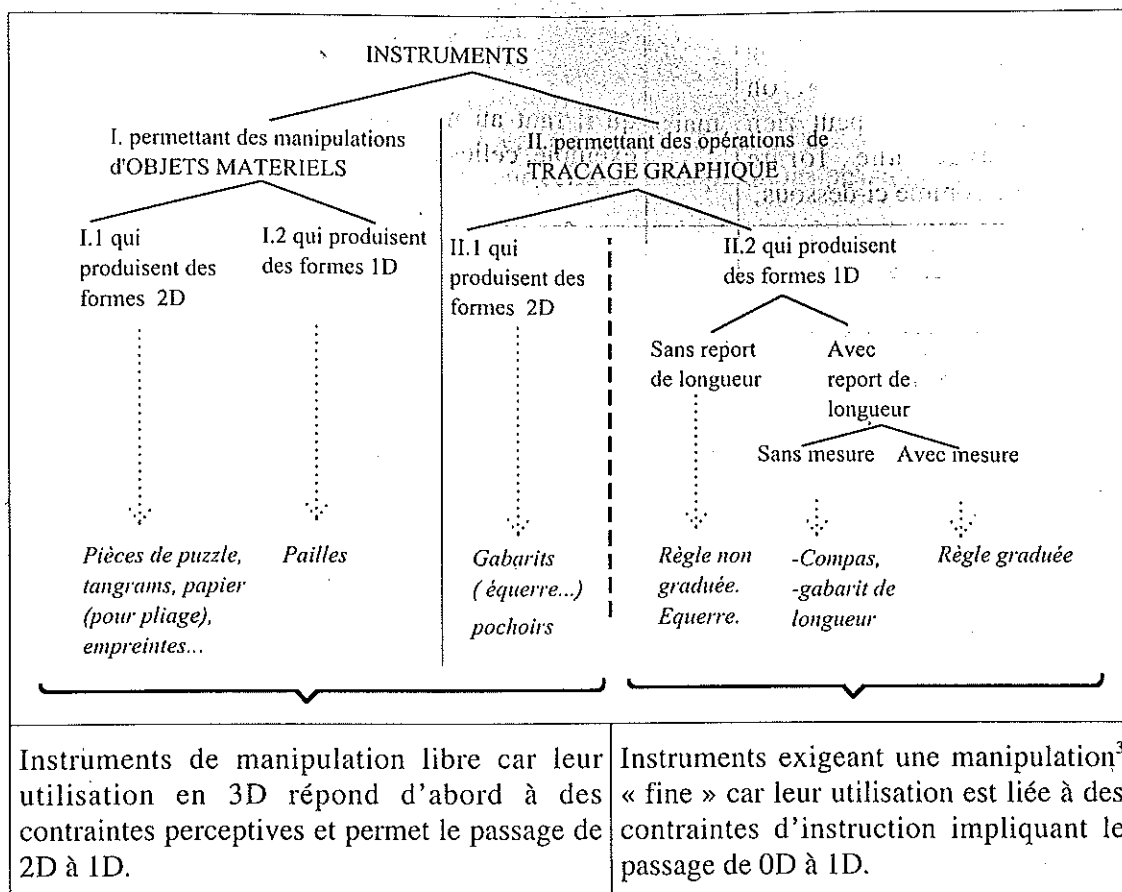


Figure 4. Classification des instruments de construction ou de production de formes

Il y a deux différences considérables entre les instruments permettant des manipulations matérielles et les instruments permettant un traçage graphique.

Les premiers permettent des opérations de retournement des pièces, d'ajustement des formes des pièces, deux à deux, pour les assembler. Or ces opérations ne sont plus possibles avec les instruments de traçage, principalement ceux du type II.2. Passer des premiers aux seconds constitue un saut cognitif considérable. En effet, on passe d'un monde où l'espace s'organise en fonction des gestes du corps et de son orientation, à un monde où l'espace est déterminé en fonction de gestes uniquement techniques, c'est-à-dire déterminés par les possibilités productives d'un instrument.

En ne produisant en fait que des tracés rectilignes ou curvilignes (Formes 1D), les outils de traçage permettent l'assemblage par superposition de formes 2D. Mais là surgit un problème qui n'existe pas lorsqu'on se contente de manipuler les pièces d'un puzzle : celui de la séparation des formes. Certes on peut superposer des pièces en les empilant, mais cela ne conduit à aucune fusion visuelle des pièces superposées, comme dans une figure produite graphiquement. Bref, d'un type d'instrument à un autre, on ne joue plus du tout le même jeu. Avec les opérations de traçage à l'aide d'instruments II.2, on entre dans le mode

³ On remarquera que, selon l'utilisation qu'on en fait, l'équerre peut changer de nature. Elle est de type III quand on vérifie qu'un angle est droit ou qu'on trace un angle droit sans contrainte, mais de type II2 quand on trace une perpendiculaire à une droite qui passe par un point.

de la représentation graphique qui, impose des contraintes de réduction de représentation mais aussi ouvre des possibilités cognitives nouvelles pour l'exploration géométrique.

L'importance des instruments choisis pour les situations de reproduction dans les premiers apprentissages de la géométrie

L'importance du choix de l'instrument dans une activité de reproduction est trop souvent méconnue. En effet, les tâches dites de reproduction peuvent être radicalement différentes (d'un point cognitif comme d'un point de vue géométrique) selon le type d'instruments que l'on donne pour reproduire une figure.

Reproduire un carré à la règle et au compas ou seulement avec une partie d'un gabarit de ce même carré conduit à deux analyses complètement différentes ; ce ne seront pas du tout les mêmes opérations qui seront instrumentalement possibles.

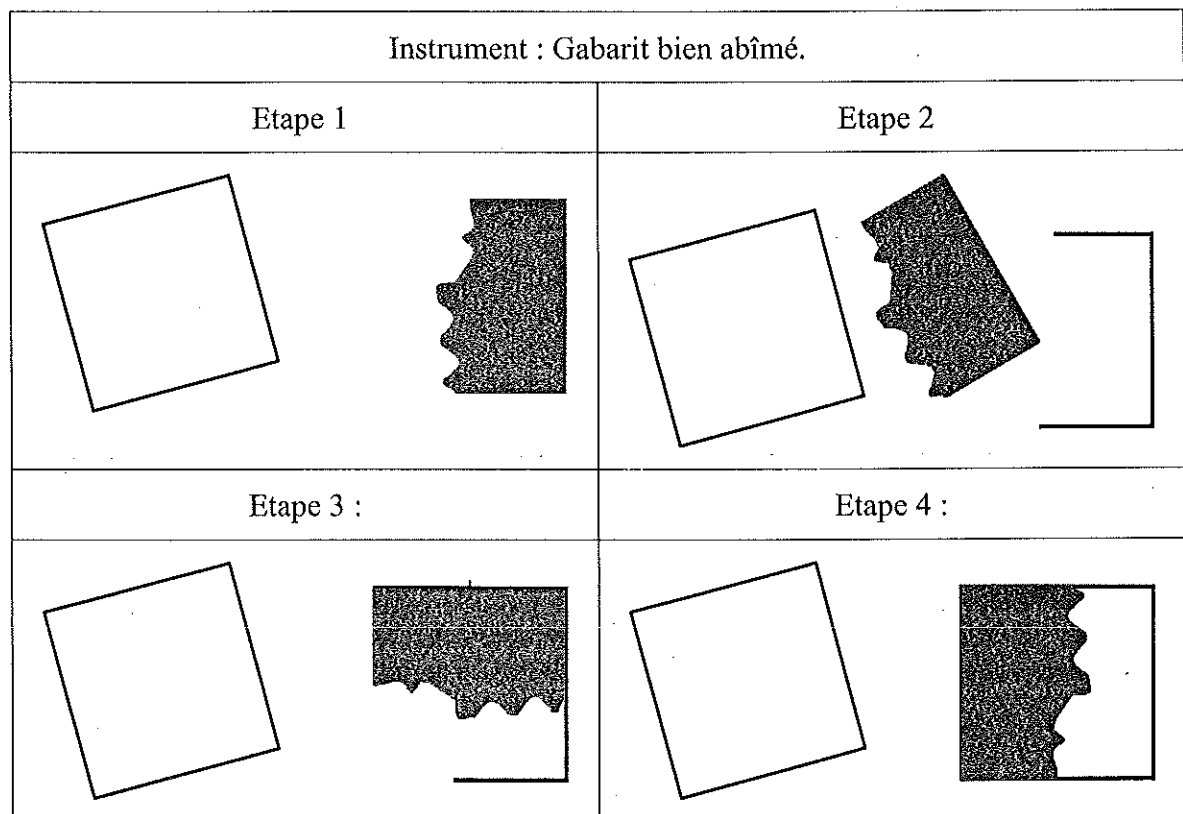


Figure 5. Reproduction d'un carré

Cet exemple montre que ce n'est tant pas la tâche de reproduction qui est importante que le type d'instrument choisi pour la reproduction.

La diversité des instruments pouvant être utilisés dans l'enseignement, et dont la classification présentée plus haut (figure 4) donne une première idée, conduit à poser quatre questions majeures.

- Quels instruments utiliser et dans quel ordre les utiliser au cours de l'organisation de séquences d'activités ? Ainsi, la règle n'est peut-être pas le premier instrument à utiliser car elle produit des unités visuelles 1D.
- La construction d'un type de figure doit-elle être associée à l'utilisation d'un instrument spécifique ou au contraire faut-il être en mesure de pouvoir construire une figure avec des instruments totalement différents ?

- Pour effectuer des reports de longueur, faut-il utiliser des instruments permettant des mesures physiques ? Cette question se pose parce que l'utilisation d'instruments permettant des mesures physiques conduit à neutraliser l'aspect visuel des figures, en focalisant l'attention directement sur des nombres et des calculs et donc à la détourner des propriétés géométriques. Les procédures numériques sont ainsi substituées aux procédures géométriques.
- Puisque les instruments conduisent à isoler visuellement soit des formes 2D soit des formes 1D, comment un choix d'instruments peut-il faire passer les élèves d'une vision perceptive 2D à cette vision en 1D qui est requise pour l'identification de propriétés géométriques ? C'est le choix de l'instrument combiné au choix de la figure qui va créer la situation permettant aux élèves de faire ce passage. Cette question n'est donc pas séparable d'une autre : « sur quel type de figure faire travailler les élèves ? »

Pour qu'une séquence d'activités de reproduction, organisée en fonction d'une variation d'instruments, puisse conduire les élèves à changer progressivement leur regard, les figures à reproduire doivent répondre à quatre critères.

- Les figures proposées doivent être des assemblages de formes et non pas seulement une « figure usuelle », c'est-à-dire la forme typique d'un polygone géométriquement remarquable (triangle, carré, rectangle...). Ces assemblages de formes peuvent se faire par juxtaposition ou par superposition
- Ces assemblages doivent respecter des alignements, car le respect des alignements est important pour favoriser l'activité qui est essentielle pour apprendre à passer des surfaces aux lignes dans l'analyse des figures, *celle du prolongement des tracés*. Ainsi les élèves pourront passer progressivement d'une analyse des figures comme assemblage de surfaces à une analyse comme assemblage de lignes. Ces assemblages peuvent aussi être déterminés par des rapports métriques.
- *Le choix d'une figure, c'est-à-dire d'un assemblage pouvant être analysé comme assemblage de surfaces ou comme un assemblage de lignes, ne peut pas être séparé du type d'instrument qui lui est associé dans l'activité que l'on propose aux élèves : la reproduire, la restaurer.....*
- La possibilité d'un contrôle de l'égalité de deux figures par superposition est importante pour donner du sens à toute activité de reproduction de figure.

Ce n'est donc pas à partir d'un travail sur des figures représentant des objets géométriques simples (droite, carré, triangle..) que les élèves peuvent entrer dans le jeu de visualisation mathématique. Or, presque toujours, ce qu'on présente aux élèves entre 5 et 11 ans reste dans le cadre de l'identification de telles figures, ce qui ramène les apprentissages à l'acquisition d'un vocabulaire.

Comment faire modifier le regard des élèves sur une figure en jouant sur les instruments à utiliser

Les instruments que l'on prend pour pouvoir reproduire une figure donnée commandent la manière de la regarder.

On voit tout de suite que certains instruments (gabarits, pochoirs) conservent la priorité perceptive 2D tandis que d'autres ne peuvent être utilisés que si on est capable de substituer à cette perception prégnante, la visualisation d'un réseau de formes 1D (règle, compas). Les tâches de reproduction vont donc être radicalement différentes selon que l'on utilise des instruments qui produisent des formes 1D ou des formes 2D. D'où une question plus pratique pour l'organisation des activités : comment, à partir d'instruments permettant

de reproduire des formes 2D, préparer les élèves à la déconstruction dimensionnelle des formes 2D sans laquelle l'utilisation d'instruments produisant des formes 1D risque de demeurer aveugle ?

Pour bien mettre en évidence le rôle de cette variable didactique qu'est la variation des instruments, nous allons encore prendre pour exemple une figure simple - un triangle - et non pas une figure qui apparaît comme un assemblage de formes comme l'exigerait cependant le premier critère indiqué plus haut. Nous reviendrons plus loin sur l'autre variable, le choix des figures.

Exemples de reproduction d'un triangle sans les instruments conventionnels de géométrie

Construire ou reproduire une figure simple signifie, ici, tracer le contour fermé de la forme simple ; l'instrument sert à guider le crayon. Pour évaluer la qualité de la reproduction, on recourt au principe de superposition du modèle et de sa réalisation. Nous allons présenter des exemples très différents de reproduction d'un triangle, en utilisant au moins un instrument producteur de formes 2D. Ce seront des gabarits ou des pochoirs déchirés. Ces outils qui sont toujours en deux dimensions peuvent a priori être utilisés simultanément ou non, mais *l'utilisation, d'un seul outil à la fois, oblige à une déconstruction 1D de la figure à reproduire* (ce qui est visible à l'exemple 3, en le comparant à l'exemple 2).

Les cinq exemples qui suivent varient sur trois points.

- Les instruments utilisés sont ou ne sont pas indépendants de la figure à reproduire.
- Le nombre d'outils disponibles à un moment donné (gabarit ou pochoir).
- L'usage d'un instrument 2D à un seul bord rectiligne qui peut être porteur d'une information ou non. L'information consiste en trait(s) rectiligne(s) que l'on trace sur l'instrument, pour permettre, des reports de longueur ou des reports d'angle et de direction. Lorsque cet instrument 2D est vierge de tout trait tracé nous l'appellerons règle non informative ; lorsque nous y avons placé un trait ou plusieurs traits, nous dirons qu'on a informé la règle et nous parlerons de règle informative.

Exemple 1

Il s'agit de reproduire un triangle avec comme instrument le gabarit du triangle qui a été malheureusement déchiré tout comme le pochoir.

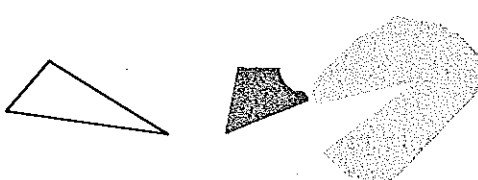

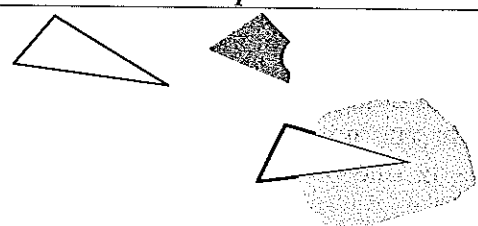
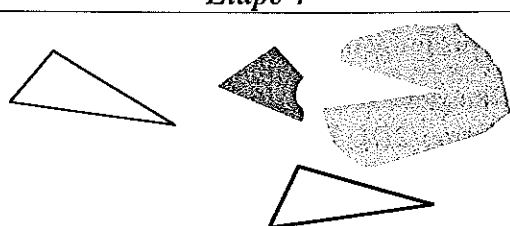
<i>Instruments : Un gabarit déchiré et un pochoir déchiré.</i>	
<i>Etape 1</i>	<i>Etape 2</i>
	
<i>Etape 3</i>	<i>Etape 4</i>
	

Figure 6.

Le geste graphique s'inscrit toujours ici dans la conception du contour fermé d'une figure 2D propre au gabarit ou au pochoir. Donner un gabarit déchiré oblige à interrompre la continuité de ce geste graphique (étape 2). Pour le compléter il faut recourir au pochoir (étape 3).

Exemple 2

Pour reproduire un triangle, un gabarit déchiré et plusieurs règles sont données.

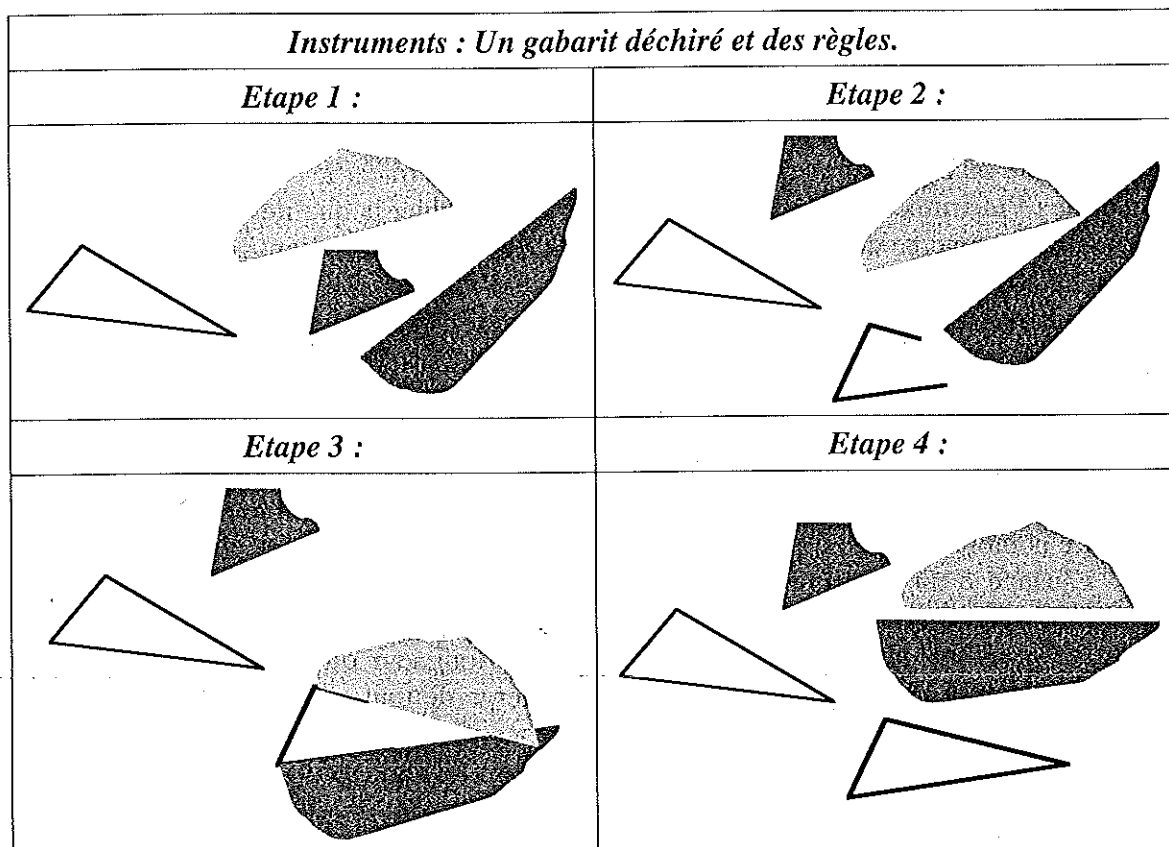


Figure 7.

Comme dans l'exemple précédent, l'utilisation du gabarit déchiré conduit à un tracé incomplet, mais ici pour le compléter il faut utiliser deux règles non informatives au lieu du pochoir. La superposition, nécessaire, de ces deux règles pour reconstituer le pochoir prépare la capacité à prolonger une ligne. (voir étape 3 de l'exemple 3, étape 2 de l'exemple 4 et étape 2 de l'exemple 5).

Exemple 3

La suppression d'une règle par rapport à l'exemple précédent, oblige à abandonner la stratégie de reconstitution du pochoir, et à abandonner aussi le graphisme du contour externe du triangle, pour tracer successivement les deux côtés manquants. Le fait qu'il n'y ait qu'une seule règle oblige également à tracer non seulement un côté mais à tracer aussi le **prolongement** de celui-ci. *Le segment tracé à l'étape 4 est le premier élément 1D tracé.*

Dans les exemples précédents, les éléments tracés n'étaient qu'une partie du contour fermé (forme 2D). Dans cette situation, d'un point de vue graphique, le contour du triangle explose donc en parties de ce contour. Il y a là une première étape dans le passage complexe de 2D à 1D.

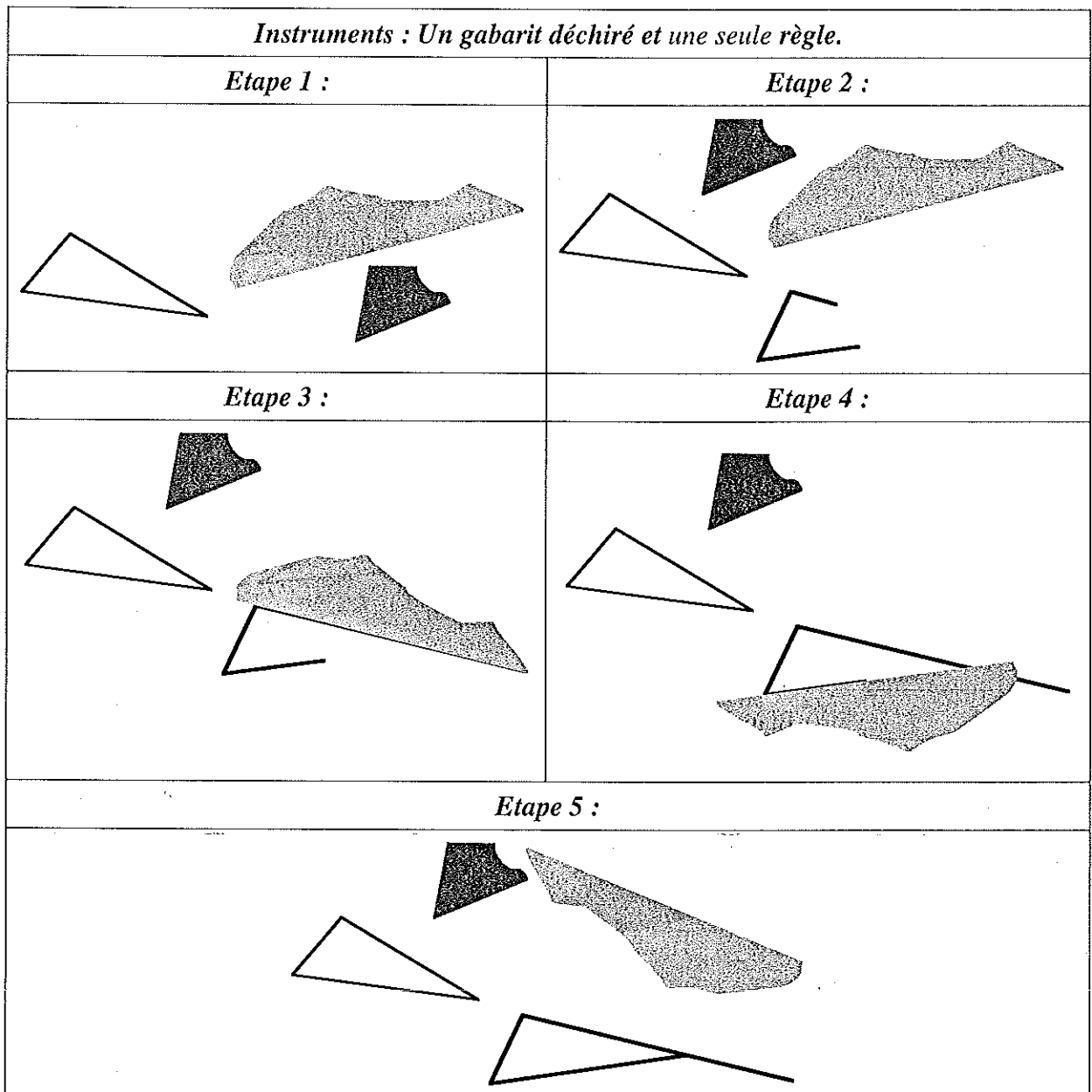


Figure 8.

Exemple 4

Comment faire lorsque la forme des instruments n'a plus aucun rapport avec le contour de la figure à reproduire ?

Le traçage de traits sur la surface quelconque à l'étape 3 ci-dessous peut apparaître comme une opération substitutive aux actions de découpe ou de pliage qui sont nécessaires pour obtenir un gabarit du triangle ou, à défaut, un gabarit déchiré de celui-ci.

La capacité de superposer une surface quelconque sur la figure à reproduire, et celle d'y inscrire un morceau de chaque côté de cette figure, de manière à pouvoir la reproduire en une seule fois par le prolongement de ces morceaux, sont l'indicateur d'une visualisation géométrique avancée.

Instruments : Une surface quelconque et une règle non informative.	
Etape 1 :	Etape 2 :
Etape 3 :	Etape 4 :
Etape 5 :	Etape 6 :
Etape 7 :	Etape 8 :

Figure 9.

Exemple 5

En l'absence d'un gabarit et d'un pochoir du triangle, comment reproduire si l'on dispose de trois règles non informatives mais que l'on peut rendre informative ?

En sachant qu'un pochoir ferait bien l'affaire...

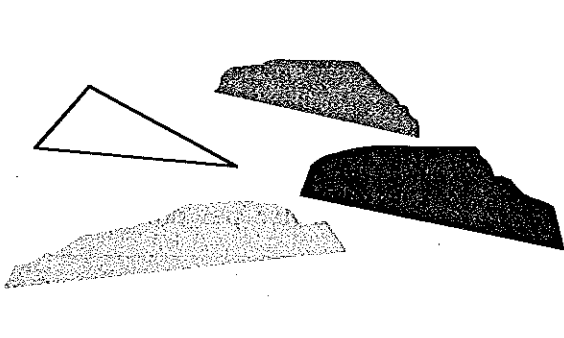
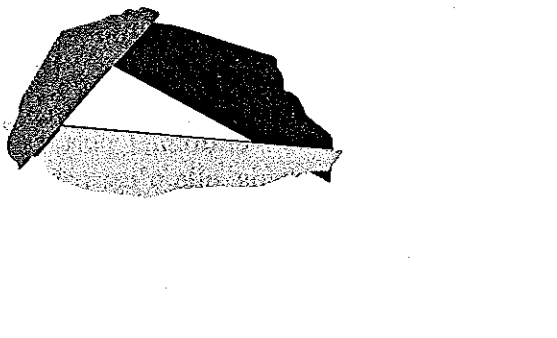
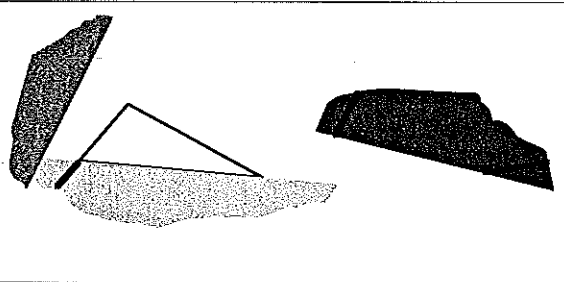
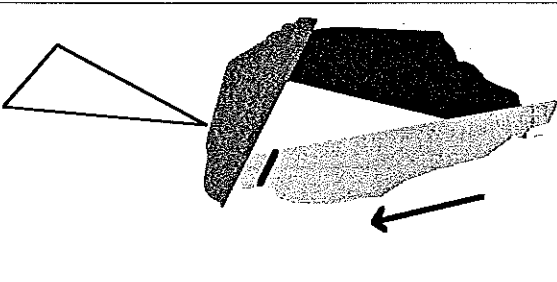
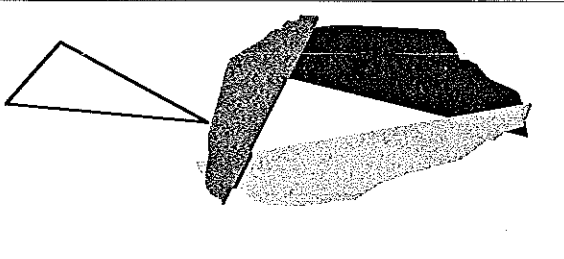
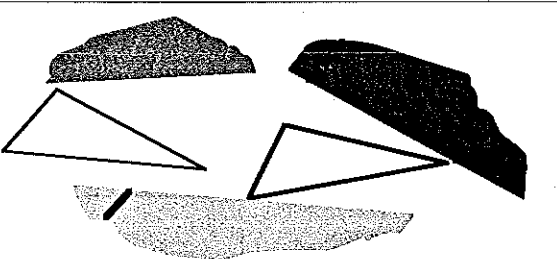
OUTILS : 3 règles non informatives.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	
Etape 5 :	Etape 6 :
	

Figure 10.

La tâche de reproduction comporte trois types d'actions :

- superposer les règles de façon à reconstituer un pochoir (étape 2) ;
- en traçant trois traits sur deux des règles (étape 3) ;
- en faisant coulisser l'une des trois règles sur l'un des traits tracés (étape 4).

On voit donc que, dans cette tâche, les règles sont placées ici par juxtaposition au triangle, et elles sont reliées entre elles par superposition. Les trois tracés faits sur les règles conservent la mémoire des superpositions.

Cette manière d'utiliser des règles introduit automatiquement l'opération de prolongement d'un tracé même si, dans un premier temps, cela ne fait pas sortir du cadre de la figure à reproduire. Mais, et c'est ce qui est d'abord important, cela brise l'unité de contour ainsi que l'unité visuelle de chacun des trois bords.

Dans cet exemple de procédure, deux règles sont informées. Le passage de l'étape 4 à l'étape 5 montre qu'on aurait pu ne rendre informative qu'une seule règle, les deux autres règles auraient alors servi à reconstituer le pochoir.

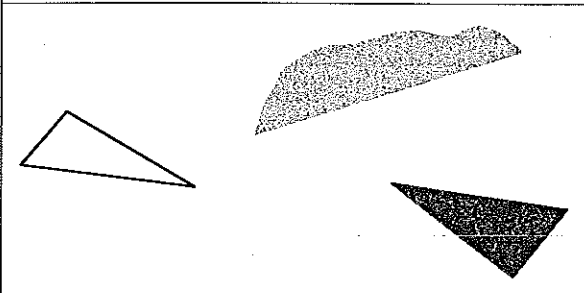
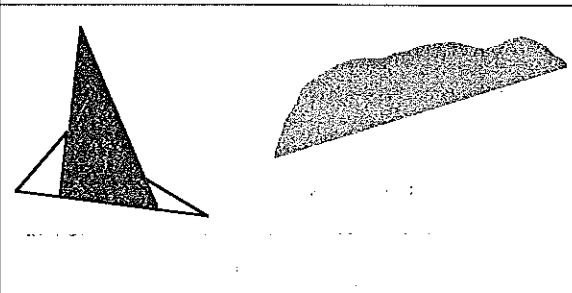
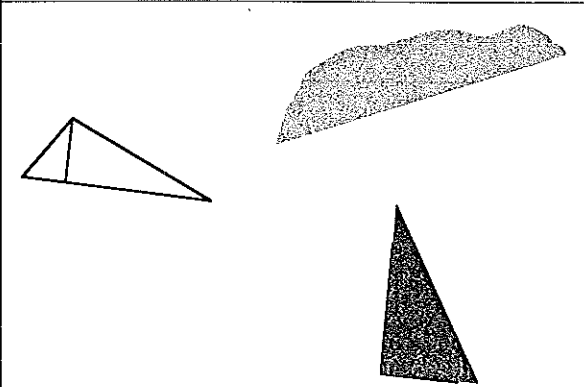
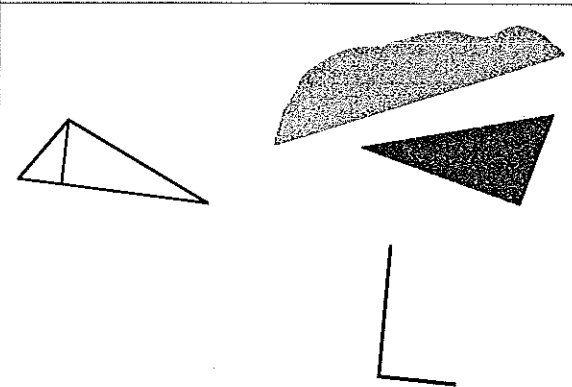
On aura reconnu l'un des cas d'égalité des triangles que l'on trouve chez Euclide. (Livre I, proposition 26)⁴.

Exemple de reproduction d'un triangle avec des instruments conventionnels de géométrie

Exemple 6

L'équerre, outil conventionnel permettant de tracer des éléments 1D, est un gabarit de triangle rectangle mais, elle n'est pas utilisée pour déplacer une forme 2D. En effet, seuls les deux côtés rectilignes sont pris en compte et on ne l'utilise pas comme une règle informative. On ne trace pas de trait sur une équerre !

Il reste néanmoins qu'il peut être utilisé comme une partie d'un gabarit de carré ou de rectangle.

Instruments : Equerre et une règle non informative.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	

⁴ « Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, soit celui des angles égaux, soit celui sous-tendant l'un des angles égaux, ils auront aussi les côtés restants égaux aux côtés restants, {chacun à chacun}, et l'angle restant égal à l'angle restant. » Livre I proposition 26 (Euclide 1990, p.243)

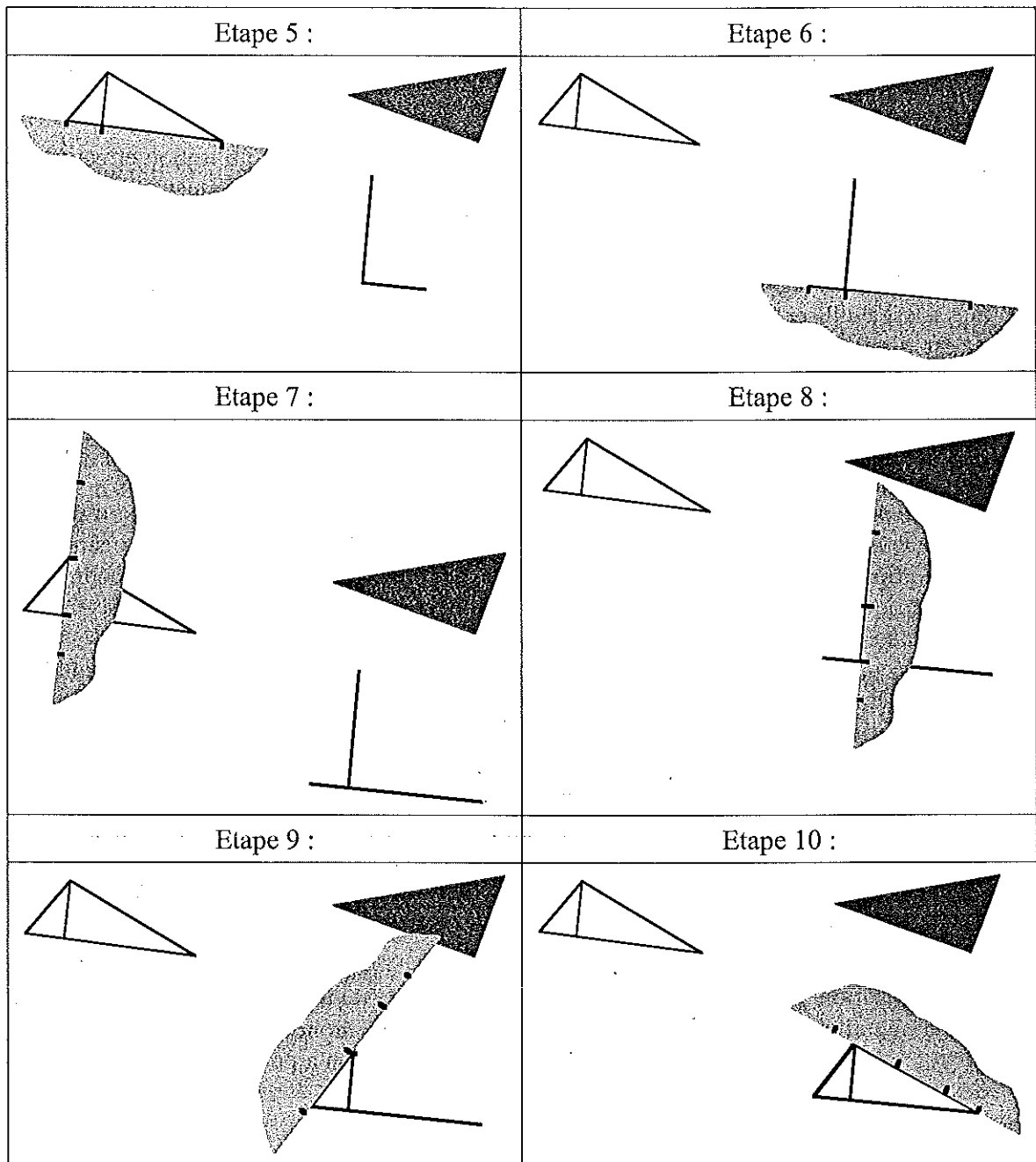


Figure 11.

Dans cet exemple, l'équerre est un instrument pour tracer des lignes, c'est-à-dire des éléments 1D, qui sont perpendiculaires. Ici, l'activité de reproduction est plus complexe car *il faut faire apparaître un tracé supplémentaire sur la figure simple du triangle à reproduire. Autrement dit, il faut transformer la figure simple initiale en une figure assemblage*. Le triangle doit être vu comme une juxtaposition (voir plus haut : figure 1) de deux triangles rectangles, triangles formellement déplaçables et reproductibles grâce à l'équerre.

Souvent les figures données à reproduire ne permettent pas aux élèves d'aborder le passage de 2D à 1D car elles contiennent un coin droit ou deux segments perpendiculaires. Dans le cas d'une figure ayant un coin droit, l'équerre est utilisée comme un gabarit, c'est-à-dire comme un outil 2D.

Dans le cas contraire, l'équerre doit être utilisée comme un outil 1D qui permet de tracer sur la figure modèle un tracé droit 1D perpendiculaire à un autre. (voir Étape 2 de la figure 11).

Cette ambiguïté de l'équerre conduit d'ailleurs à s'interroger sur l'utilisation effective des autres instruments par les élèves. L'utilisation des instruments de reproduction, tels que les gabarits, se faisant par superposition et donc par approximation perceptive, on peut se demander si des élèves, qui ne peuvent pas effectuer ou qui n'ont pas pris conscience du changement de regard impliqué par le passage des formes 2D aux formes 1D, ne cherchent pas aussi à utiliser les instruments de construction comme s'il s'agissait de gabarits.

C'est d'ailleurs l'un des constats majeurs qui ressort de l'étude de N. Bouleau (2001 p.29) : « à partir d'un certain seuil de compétences en traçage... les élèves ne parviennent plus à joindre les points à la règle et se remettent au dessin à main levée »

Choix des instruments et objectifs d'apprentissage

Les élèves du cycle 1 ont eu l'occasion de tracer des figures à partir d'un gabarit ou d'un pochoir. Au cycle 2, ils doivent apprendre à tracer des figures en utilisant les instruments conventionnels. Or, une telle utilisation ne peut les rendre sensible aux contraintes géométriques internes aux figures reproduites ou construites que s'ils peuvent déconstruire visuellement les formes 2D en éléments 1D.

Cette déconstruction dimensionnelle, qui est cognitivement très complexe, ne semble pas pouvoir être acquise par la seule utilisation d'instruments produisant des éléments 1D. C'est l'utilisation d'instruments différents, les uns permettant de transporter des informations 2D, les autres seulement des informations 1D, qui va permettre aux élèves d'entrer progressivement dans la déconstruction dimensionnelle des formes 2D, laquelle est une condition pour l'explicitation des connaissances géométriques. En effet, les connaissances géométriques présupposent une articulation entre la visualisation et le langage, que celui-ci soit utilisé à des fins de description, de distinction (sous-jacentes à tout vocabulaire) ou de justification, qu'on ne trouve qu'en géométrie et nullement dans les autres domaines de connaissance (Duval 2005).

L'organisation d'activités pour faire entrer les élèves dans ce processus cognitif fondamental pour les savoirs géométriques implique donc une progression sur les instruments à utiliser pour reproduire des figures, comme on a pu la voir dans la séquence des exemples précédents :

1. Gabarits et pochoirs.
2. Gabarits et plusieurs règles (surface à un seul bord rectiligne et informable)
3. Gabarit et une seule règle.
4. Surface quelconque et une règle.
5. Uniquement des règles.
6. Une règle et une équerre

Dans la séquence des exemples précédents, la progression présentée a été faite uniquement en fonction de la variable « instruments ». Pour pouvoir organiser en classe des activités qui développent un changement de regard, il faut évidemment la combiner avec un choix approprié des figures à reproduire et, également, déterminer les conditions dans lesquelles une tâche de reproduction est demandée.

Repères pour l'organisation d'activités

Le choix des instruments doit être replacé dans le contexte des deux questions suivantes:

- quels types de figures choisir ?
- comment motiver les élèves pour qu'ils s'approprient la tâche ?

Quels types de figures choisir ?

Nous retiendrons ici deux critères.

Les figures choisies doivent pouvoir être vues comme un assemblage de formes par juxtaposition et comme un assemblage par superposition.

Un polygone concave ou une figure-assemblage de parties concaves et convexes semblent être d'excellentes figures candidates. Le principe de clôture est en effet l'un des principaux facteurs d'organisation d'éléments du champ perceptif en une unité figurale (Kanizsa 1998, p.40-41). C'est ce qui conduit à voir spontanément toute forme concave dans son enveloppe convexe, donc à la compléter.

Les figures choisies doivent obliger à prolonger des lignes ou à en construire de nouvelles pour réussir la reproduction.

Le prolongement de lignes prépare les élèves à d'ultérieures recherches d'alignements.

Voici un exemple de figure répondant à ces deux critères. On remarquera en particulier que la figure choisie centre l'activité sur les prolongements de lignes et sur des reports de longueurs.

Instruments : Gabarit d'une sous-figure et règle.	
Etape 1 :	Etape 2 :
Etape 3 :	Etape 4 :

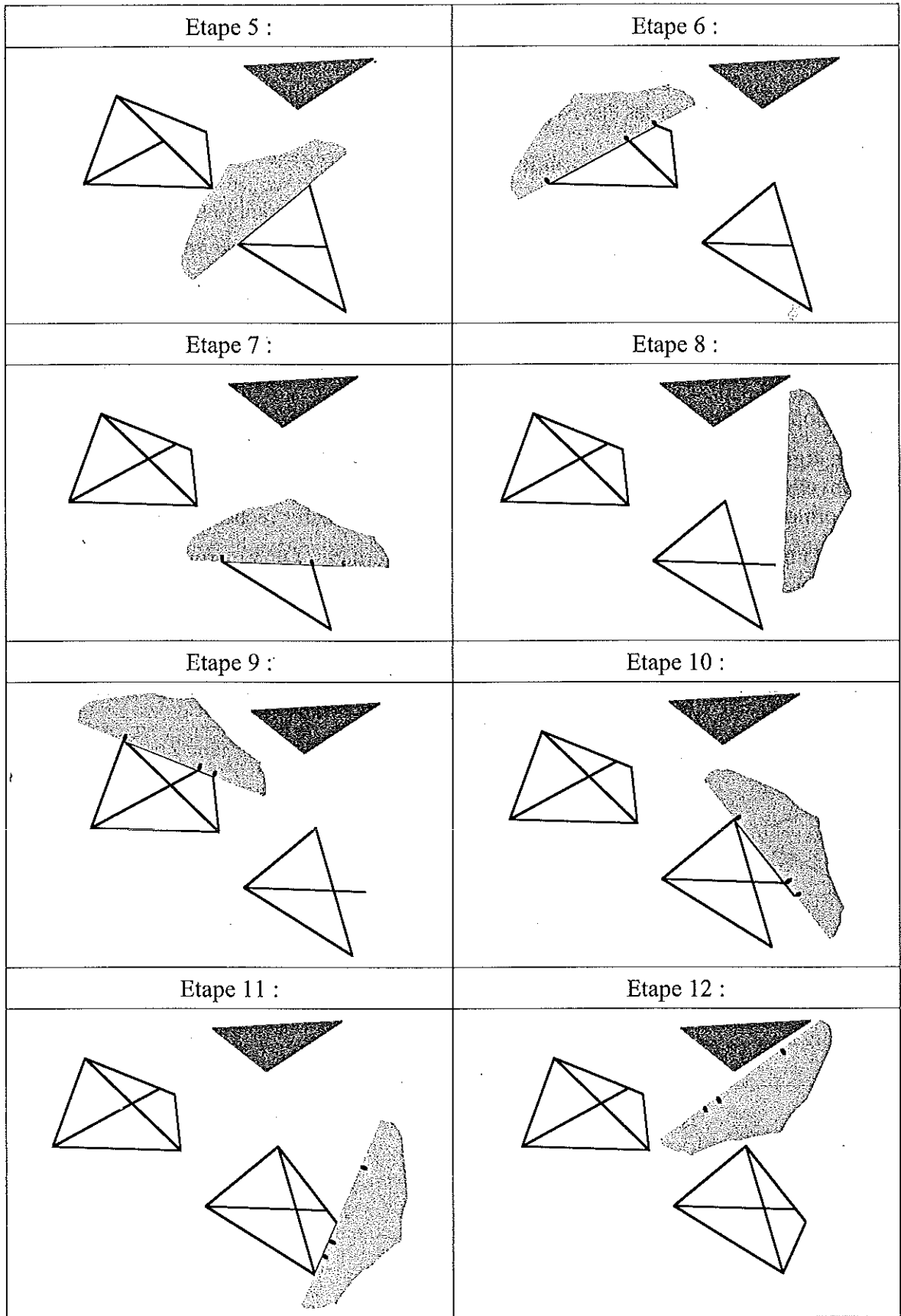


Figure 12.

La figure à reproduire a été choisie pour que le polygone concave puisse être décomposé en deux triangles (étapes 2 et 3). On remarquera surtout l'importance de l'étape 6. *Le placement de la règle opaque sur la figure modèle constitue un enrichissement de cette figure.* En effet, il revient à décomposer le quadrilatère en deux parties : une partie cachée (un triangle) et une partie visible (un triangle et un nouveau quadrilatère). Ce partage impose un prolongement. Toute cette opération met en oeuvre une déconstruction dimensionnelle. Elle va permettre ensuite un report de longueur (étape 7) sur un segment qui, dans le modèle à reproduire, n'était ni entièrement tracé ni élément de son contour.

Pour bien prendre en compte le second critère qui touche directement à la décomposition dimensionnelle des formes, une activité de restauration de figures, et pas seulement de reproduction, est apparue très efficace. Outre le modèle, on donne une reproduction déjà commencée, c'est-à-dire une version du modèle dont certains tracés ont été effacés, de telle sorte que l'élève n'ait plus qu'à compléter. Or, en amorçant ainsi la reproduction, on impose certains algorithmes de reproduction. On voit donc que l'activité de restauration fournit une variable didactique supplémentaire selon le nombre et les propriétés des tracés que l'on a effacés (M.J. Perrin 2004, 77-78).

Comment motiver les élèves pour qu'ils s'approprient les tâches de reproduction ou de restauration ? Le jeu des malus

Les activités de reproduction ou de restauration de figures représentent des tâches différentes selon les instruments utilisés. Nous avons montré comment une progression dans l'usage des instruments en relation avec des figures visuellement riches fait entrer dans le jeu de la déconstruction dimensionnelle des formes. Pour que cela soit véritablement opérationnel, il faut que les élèves soient en quelque sorte poussés à prendre conscience des possibilités et des contraintes de chaque instrument utilisé, c'est-à-dire au fait que l'utilisation d'instruments différents conduit à des procédures différentes. Il est alors intéressant de faire différencier le coût de chaque procédure par un jeu de malus.

Pour une tâche donnée, de reproduction ou de restauration, les élèves peuvent disposer de plusieurs instruments et peuvent également demander des aides (par exemple une information sur le positionnement d'un instrument). Chaque utilisation d'un instrument, comme chaque demande d'aide, coûte un certain nombre de points. Il ne s'agit donc pas seulement de reproduire ou de restaurer, mais de le faire au moindre coût possible.

Des enseignantes de CE2, ayant suivi un stage de formation, ont essayé de mettre systématiquement en oeuvre des activités d'analyse de figures. Elles ont fait travailler les élèves sur des figures qu'elles avaient élaborées elles-mêmes à la suite de ce stage et elles ont instauré le jeu du malus. Voici, extrait d'un très long entretien sur leur expérience, comment elles ont perçu l'évolution de leurs élèves dans le cadre de ces activités.

« Ce qui nous est apparu vraiment très, très intéressant, très motivant pour les enfants c'était ce système de bonus et de malus... à savoir que le but du jeu c'était d'essayer d'avoir le moins de points possible, de construire sa figure avec le moins de points possible... Dans les toutes premières séances, ils se jettent tout de suite dans la reproduction ... C'est après, au bout de certaines séances, là ils comprennent vraiment l'intérêt de l'analyse et après ils prennent vraiment un grand temps d'analyse, ils ne commencent pas la reproduction avant d'avoir vu des points liés, des milieux... Ils aiment beaucoup... ah oui, oui ils aiment beaucoup rechercher des points, c'est un peu des indices, ils doivent chercher, ils doivent trouver des choses, ils savent qu'ils vont trouver des choses, donc ils sont face à une situation problème... Oui c'est ludique, c'est...c'est une recherche, donc ils sont dans l'activité, ils sont très actifs même les enfants qui sont

en difficulté, trouvent des choses ... Ils ont vraiment envie de réussir et de réussir bien. Et ils sont en compétition même pas forcément par rapport aux autres mais, on les sent vraiment en compétition par rapport à eux-mêmes. Je pense que ça c'est aussi lié au goût qu'on leur a donné. C'est vrai que c'est des activités qu'on aime beaucoup... » (Verbaere & al, en cours).

Conclusion

L'introduction de connaissances géométriques implique une déconstruction dimensionnelle qui est impossible sans un changement dans la manière habituelle de regarder les figures. L'un des objectifs des premières activités géométriques est d'introduire les élèves dans ce changement qu'ils ne peuvent pas soupçonner. Nous avons vu que l'organisation d'activités pour atteindre cet objectif combine un choix de figures appropriées et une variation dans les instruments utilisés pour les reproduire.

Ce que nous avons appelé les figures-assemblages jouent un rôle clé pour faire découvrir des processus de déconstruction des formes 2D, qui permettent en même temps d'enrichir une figure de départ. En effet, une figure-assemblage donne lieu à une décomposition visuelle qui s'opère en deux temps :

- décomposer en formes 2D qui, par juxtaposition ou par superposition, permettent d'obtenir cette figure ;
- reconnaître la présence d'un élément double bord, commun à deux contours fermés, ce qui revient à l'isoler de deux formes dont il est un bord.

L'utilisation des instruments classiques (la règle, l'équerre) présuppose, comme évident aux yeux des élèves, cette déconstruction, qui est à l'opposé de leur manière de voir. En effet, les activités à la règle et à l'équerre (utilisées de manière conventionnelle), ne sont possibles que si une figure 2D peut être décomposée en éléments 1D. Or une telle décomposition exige que les élèves aient remarqué non seulement les relations topologiques entre ces éléments 1D mais aussi leurs relations d'alignement et leurs relations métriques.

Pour aider les élèves à prendre conscience de ce jeu de la visualisation géométrique qu'est le passage de 2D à 1D, il faut utiliser des instruments permettant de décomposer une figure-assemblage en d'autres formes 2D juxtaposables ou superposables. Tout le monde pense évidemment aux gabarits. Mais pour que leur utilisation soit didactiquement efficace, il faut proposer des gabarits qui ont été grignotés. La tâche de reproduction changera selon l'importance du grignotage. Mais c'est là une variable à la disposition de l'enseignant pour construire une progression.

Dans les différents exemples présentés, les figures étaient quelconques mais, elles obligeaient à une analyse en termes de recherche de prolongements ou d'alignements. On peut évidemment élargir ce champ en proposant des figures symétriques ou proportionnelles. Dans ce cas, les tâches de reproduction, de restauration ou de construction deviennent des activités pour faire jaillir aussi des propriétés géométriques, mais cela constitue l'étape suivante...

Références bibliographiques

- Bouleau N., 2001, Reproduction de figures et géométrie en cycle 1 et 2. *Grand N* n°67. 15-32.
- Duval R., 2005, Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5-55
- Godin M., 2004, De trois regards possibles sur une figure au regard « géométrique », *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2004*, ADIREM et IREM de Paris 7, p. 39-70
- Euclide, 1990, *Les Eléments*, V. 1 (tr. B.Vitrac). Paris : P.U.F.
- Kanizsa G., 1998, *La grammaire du voir* (tr. A. Chambolle). Paris : Diderot éditeur
- Peirce, Ch. S., 1978, *Ecrits sur le signe*. Paris : Le Seuil
- Perrin-Glorian M.J., 2004, Des situations pour apprendre à regarder les figures. Quelques résultats et perspectives. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2004*, ADIREM et IREM de Paris 7, p. 71-89.
- Verbaere O., Gaudeul C., 2005, *Entretien sur un stage en géométrie*. Document IUFM centre de Lille.