Chapitre 10 : Proportionnalité

F.Chaussat

Objectifs :

1. Déterminer la quatrième proportionnelle
2. Caractériser graphiquement la proportionnalité
3. Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs
4. Manipuler les pourcentage et résoudre des problèmes

I - Situation de proportionnalité :

1 - Définitions

Définitions :

- Un tableau traduit une situation de proportionnalité lorsque l'on passe d'une ligne à l'autre en multipliant toujours par le même nombre.
- Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.
- Un tel tableau est appelé tableau de proportionnalité.

I - Situation de proportionnalité :

1 - Définitions

Exemple :

On considère le tableau suivant :

5	20	15
4	16	12

$\times \frac{4}{5}$

On sait que :
Les coefficients pour passer de la $1^{\text{ère}}$ ligne à la $2^{\text{ème}}$ ligne sont :

- $1^{\text{ère}}$ colonne : $\frac{4}{5}$
- $2^{\text{ème}}$ colonne : $\frac{16}{20} = \frac{16:4}{20:4} = \frac{4}{5}$
- $3^{\text{ème}}$ colonne : $\frac{12}{15} = \frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$

Or : $\frac{4}{5} = \frac{16}{20} = \frac{12}{15}$

Donc $\boxed{\text{ce tableau est un tableau de proportionnalité.}}$

I - Situation de proportionnalité :

1 - Définitions

Définitions :

Lorsque dans deux colonnes d'un tableau de proportionnalité l'on connait trois nombres, on peut calculer le quatrième appelé :

quatrième proportionnelle.

I - Situation de proportionnalité :

2 - Propriétés du produit en croix

Si

a	c
b	d

est un tableau de proportionnalité, alors $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

on en déduit que : $b \times c = a \times d$.

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad b \times c = a \times d$$

Propriété :

Si un tableau représente une situation de proportionnalité, alors les produits en croix sont égaux.

Comparer : $\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{16}{20}$

- $4 \times 20 = 80$
- $5 \times 16 = 80$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

Comparer : $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{7}{9}$

- $3 \times 9 = 27$
- $5 \times 7 = 35$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7}{9}$$

I - Situation de proportionnalité :

3 - Déterminer la quatrième proportionnelle

Méthodes :

Pour déterminer une quatrième proportionnelle, on choisit la méthode de calcul la plus adaptée selon la situation :

1. en utilisant les propriétés des colonnes,
2. en utilisant le coefficient de proportionnalité,
3. en utilisant l'égalité des produits en croix .

II - Représentation graphique

Propriété :

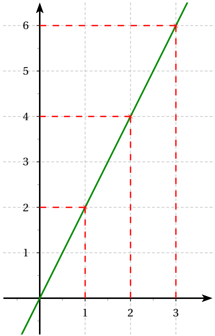
Si des points représentent graphiquement une situation de proportionnalité, alors ils sont alignés entre eux et avec l'origine du repère.

Propriété réciproque :

Si les points sont alignés entre eux et avec l'origine du repère, alors ils représentent graphiquement une situation de proportionnalité.

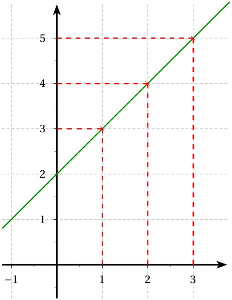
II - Représentation graphique

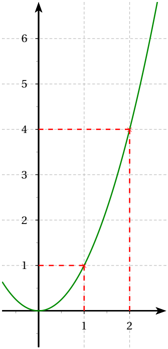
Exemples :



Ce graphique représente une situation de proportionnalité.

II - Représentation graphique





Ces deux graphiques ne représentent pas une situation de proportionnalité.

III - Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

1 - Échelles : Rappels

Définition :

L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des distances réelles aux distances sur le plan, exprimées dans la même unité.

On obtient donc le tableau suivant :

Distance réelle
Distance sur le plan

$\times$Échelle

III - Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

2 - Vitesse moyenne

Définition :

La vitesse moyenne d'un mobile lors d'un mouvement est le quotient de la distance parcourue par la durée du mouvement.

$$\underbrace{v}_{\text{vitesse moyenne}} = \frac{\overbrace{d}^{\text{distance}}}{\underbrace{t}_{\text{durée (temps)}}}$$

III - Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

2 - Vitesse moyenne

Exemple :

Un TGV a parcouru 512 km en 2 h.

distance en km

$$\frac{512}{2} = 256$$

vitesse en km/h

temps en $heures$

On peut dire qu'il a roulé à la vitesse moyenne de 256 km/h, il a parcouru 256 km en 1 h.

III - Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

2 - Vitesse moyenne

Remarque

L'unité dans laquelle est exprimée une vitesse moyenne dépend du choix des unités de distance et de durée.

Exemples :

- ⋆ Si la distance est exprimée en kilomètres et la durée en heures, alors la vitesse est exprimée en kilomètres par heures (km/h ou $km.h^{-1}$).
- ⋆ Si la distance est exprimée en mètres et la durée en secondes, alors la vitesse est exprimée en mètres par secondes (m/s ou $m.s^{-1}$).

IV - Les pourcentages

1 - Appliquer un pourcentage

Méthode :

Appliquer le pourcentage $p\%$ traduit une situation de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est $\dfrac{p}{100}$.

Cela revient donc à multiplier par $\dfrac{p}{100}$.

Exemple :

Dans un collège de 600 élèves, 51 % sont des filles.
Combien y a-t-il de fille dans ce collège ?

Élèves	600	100
Filles	?	51

$$600 \times \frac{51}{100} = 306$$

Il y a 306 filles dans ce collège

IV - Les pourcentages

2 - Déterminer un pourcentage

Méthode :

Déterminer un pourcentage, c'est exprimer une proportion de dénominateur 100. Pour cela on peut utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemple :

Dans un collège de 450 élèves, 18 font partie du club théâtre
Quel est le pourcentage d'élèves qui font partie du théâtre ?

IV - Les pourcentages

2 - Déterminer un pourcentage

Exemple :

On utilise le produit en croix :

18 élèves sur 450 font du théâtre, cela s'écrit aussi : $\dfrac{18}{450}$

On veut la même proportion, c'est à dire la même fraction avec un dénominateur égal à 100 soit :

$$\frac{18}{450} = \frac{x}{100}$$

$$18 \times 100 = x \times 450$$

$$\frac{18 \times 100}{450} = x$$

$$x = 4$$

4 % des élèves du collège font parti du club théâtre.

IV - Les pourcentages

2 - Déterminer un pourcentage

Exemple :

On utilise un tableau de proportionnalité :

Élèves du collège	450	100
Élèves au club Théâtre	18	?

On utilise la règle de trois : $\dfrac{18 \times 100}{450} = 4$

4 % des élèves du collège font parti du club théâtre.